МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики

**Е.В. Захаров, И.В. Дмитриева, С.И. Орлик**

Методическое пособие по курсу

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Для студентов 3 курса (III поток)
факультета ВМК

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2010

УДК 517.958(075.8)
ББК 22.161.6:22.311я73
З-38

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова*

Рецензенты:
доцент *И.Н. Иновенков,* доцент. *А.В. Разгулин*

**Захаров Е.В., Дмитриева И.В., Орлик С.И.**

З-38 **Уравнения математической физики**: Методическое пособие для студентов 3 курса (III поток). – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2010. – 136 с.
ISBN 978-5-89407-414-6
ISBN 978-5-317-03165-7

Методическое пособие содержит основной материал курса лекций для студентов 3 курса (III поток) факультета ВМиК МГУ и соответствует программе семестрового курса «Уравнения математической физики». Формулируются основные задачи для простейших уравнений в частных производных второго порядка параболического, эллиптического и гиперболического типов, в общем случае – с тремя пространственными переменными. Рассматриваются краевые условия первого и второго рода, упоминаются условия третьего рода. Изучаются вопросы о существовании, единственности и устойчивости классических решений поставленных задач. Рассматриваются некоторые методы построения решений таких задач. В частности, подробно описан метод разделения переменных.

УДК 517.958(075.8)
ББК 22.161.6:22.311я73

Издательский отдел
Факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова
Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус

*Учебное издание*

ЗАХАРОВ Евгений Владимирович, ДМИТРИЕВА Ирина Владимировна,
ОРЛИК Сергей Игоревич

Методическое пособие по курсу
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Для студентов 3 курса (III поток)

Подписано в печать 09.03.2010. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,5. Тираж 300 экз. Изд. № 094 Заказ № 4508

ООО «МАКС Пресс».
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 627 к. Тел. 939-3890, 939-3891. Тел./факс 939-3891

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403

ISBN 978-5-89407-414-6
ISBN 978-5-317-03165-7

# Содержание

## Литература.

1. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. – М., " Наука", 1977.

2. Е.В. Захаров, И.В. Дмитриева, С.И. Орлик. Уравнения математической физики. Методическое пособие. – М., Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2005.

## Дополнительная литература.

1. В.Я. Арсенин. Методы математической физики и специальные функции. – М., " Наука", 1974.

2. А.В. Бицадзе. Уравнения математической физики. – М., " Наука", 1976.

3. А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. Задачи по математической физике. – М., Издательство Московского университета, 1998.

4. Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике. – М., "Наука", 1972.

5. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. – М., "Наука", 1971.

6. А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. Лекции по математической физике. – М., Издательство Московского университета; "Наука", 2004.

## Введение.

Курс «Уравнения математической физики» является естественным продолжением курса «Дифференциальные уравнения», который был посвящен теории обыкновенных дифференциальных уравнений, начальным и краевым задачам для таких уравнений.

В курсе уравнений математической физики изучаются дифференциальные уравнения в частных производных в основном второго порядка для функций нескольких переменных (от двух до четырех). Слова «математическая физика» появились в названии курса вследствие того, что рассматриваемые в нём дифференциальные уравнения в частных производных и задачи для них являются математическими моделями ряда фундаментальных физических процессов: распространения тепла, колебаний, волновых процессов и других.

Остановимся на обозначениях и определениях. Пусть $R^2$–евклидово пространство $(x_1, x_2)$. Соотношение, включающее функцию $u(x_1, x_2)$ и производные этой функции по $x_1$ и $x_2$ любого порядка называется дифференциальным уравнением в частных производных (ДУЧП).

Порядок ДУЧП определяется порядком наивысшей производной, входящей в уравнение.

Если обозначить $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = u_{x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = u_{x_2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{x_1 x_2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = u_{x_1 x_1}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u_{x_2 x_2}$ ,то соотношение

$$F(x_1, x_2, u(x_1, x_2), u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, u_{x_2 x_2}) = 0, \qquad (1)$$

есть ДУЧП второго порядка общего вида. Уравнение (1) называется линейным, если оно линейно относительно функции и всех её производных. Общая форма линейного ДУЧП второго порядка для функции $u = u(x_1, x_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &a_{11}u_{x_1x_1} + a_{12}u_{x_1x_2} + a_{21}u_{x_2x_1} + a_{22}u_{x_2x_2} + \\ &+ b_1u_{x_1} + b_2u_{x_2} + cu + f(x_1, x_2) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где коэффициенты уравнения $a_{ij}, b_i, c, i, j = 1,2$ – в общем случае функции координат $(x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2)$ – заданная функция.

Если $f(x_1, x_2) \equiv 0$, то уравнение (2) называется однородным, в противном случае неоднородным.

Если все коэффициенты $a_{ij}, b_i, c, i, j = 1,2$ – постоянны, то уравнение (2) называется ДУЧП с постоянными коэффициентами, в противном случае с переменными. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица второго порядка, называется матрицей коэффициентов при старших производных. Так как $u_{x_1x_2} = u_{x_2x_1}$, то матрицу $A$ всегда можно считать симметричной $(a_{12} = a_{21})$.

Классификацию уравнений типа (2) можно осуществить, используя свойства симметричных матриц и закон инерции квадратичных форм из линейной алгебры. Из линейной алгебры следует, что характеристические числа (собственные значения) симметричных матриц всегда вещественны, а количество положительных, отрицательных и нулевых характеристических чисел инвариантно относительно выбора системы координат.

Зафиксируем точку $M(x_1, x_2)$. Тогда $A$ – числовая матрица, а её характеристические числа вещественны.

Пусть $(\alpha, \beta, \gamma)$ – тип уравнения, $\alpha$ – число положительных характеристических чисел, $\beta$ – число отрицательных характеристических чисел, $\gamma$ – число нулевых характеристических чисел. Возможны 3 типа уравнений: (2, 0, 0) или (0, 2, 0) – уравнения эллиптического типа, (1, 1, 0) – уравнения гиперболического типа, (1, 0, 1) или (0, 1, 1) – уравнения параболического типа.

**Примеры.** Пусть $x_1 = x$, $x_2 = y$ — пространственные координаты, тогда $u_{xx} + u_{yy} = 0$ – уравнение эллиптического типа (уравнение Лапласа). Если $x_1 = x$ – пространственная координата, а $x_2 = t$ – координата времени, то $u_{tt} - u_{xx} = 0$ – уравнение гиперболического типа (уравнение колебаний), а $u_t - u_{xx} = 0$ – уравнение параболического типа (уравнение теплопроводности).

Эта классификация полностью исчерпывает всё множество уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

**Замечание 1.** Аналогично можно провести классификацию ДУЧП второго порядка с любым числом независимых переменных и выделить классы эллиптических, параболических и гиперболических типов.

1. $(1, n-1, 0)$ или $(n-1, 1, 0)$ – гиперболический тип.
2. $(n, 0, 0)$ или $(0, n, 0)$ – эллиптический тип.
3. $(n-1, 0, 1)$ или $(0, n-1, 1)$ – параболический тип.

# Глава 1. Граничные задачи для уравнения теплопроводности.

## § 1. Построение математической модели процесса распространения тепла в пространстве. Вывод уравнения теплопроводности.

Процесс распространения тепла в пространстве можно описать температурой $u(M,t)$, зависящей от точек $M(x,y,z)$ и времени $t$ ($x, y, z$ – декартовы координаты точки в пространстве). Если температура зависит от точек $M$, то возникают потоки тепла, направленные от областей с высокой температурой к областям с меньшей температурой. Их можно охарактеризовать вектором плотности теплового потока $\vec{W}(M,t)$. Пусть $d\sigma$ – некоторая площадка, а $\vec{n}$ – единичная нормаль к $d\sigma$. Количество тепла, протекающее через $d\sigma$ за единицу времени, равно $W_n d\sigma = (\vec{W}\cdot\vec{n})d\sigma$. По закону Фурье $\vec{W} = -k\, grad_M\, u$, где скалярная величина $k$ – коэффициент теплопроводности среды. В общем случае, если среда неоднородна, $k$ является функцией точки $M$. Поскольку $k > 0$, знак “минус” в законе Фурье указывает, что тепло распространяется именно от области с высокой температурой к области с меньшей температурой, а не наоборот.

Выведем уравнение, описывающее процесс распространения тепла (уравнение теплопроводности). Рассмотрим некоторую область $\Omega$, ограниченную замкнутой поверхностью $S$. Уравнение баланса тепла для $\Omega$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$ запишется в виде

$$\iiint\limits_{\Omega} C\,\rho\left[u(M,t_2)-u(M,t_1)\right]d\tau_M =$$

$$= -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{S} W_n(P,t)d\sigma_P + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_{\Omega} F(M,t)d\tau_M, \tag{1.1}$$

где $M(x_M, y_M, z_M)$ – точка интегрирования по $\Omega$, $d\tau_M = dx_M dy_M dz_M$ – элемент объёма, $P(x_P, y_P, z_P)$ – точка интегрирования по поверхности $S$, $d\sigma_P$ – элемент поверхности, $C$ – удельная теплоемкость, $\rho$ – плотность массы, $F(M,t)$ – плотность тепловых источников (тепло может подаваться в область, либо поглощаться вне зависимости от его температуры). Соотношение (1.1) представляет собой уравнение теплового баланса в области $\Omega$ за время $\Delta t$: изменение количества тепла в объёме $\Omega$ за время $\Delta t$ (левая часть уравнения), обусловлено потоком тепла через граничную поверхность $S$ (первое слагаемое в правой части уравнения ) и теплом, выделившимся в объёме $\Omega$ за время $\Delta t$ в результате действия источников ( второе слагаемое в правой части уравнения).

Чтобы перейти от интегрального уравнения баланса к дифференциальному, предположим, что функция $u(M,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по $(x,y,z)$ и один раз по $t$. Тогда можно воспользоваться формулой Гаусса-Остроградского

$$\iint\limits_{S} W_n d\sigma_P = \iiint\limits_{\Omega} div\,\vec{W}\,d\tau_M = -\iiint\limits_{\Omega} div(k \cdot grad\,u)d\tau_M .$$

$$\iiint\limits_{\Omega} C\,\rho\left[u(M,t_2)-u(M,t_1)\right]d\tau_M = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_{\Omega} div(k\cdot grad\,u)\,d\tau_M +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_{\Omega} F(M,t)\,d\tau_M .$$

Фиксируем произвольную точку $\widetilde{M}(x,y,z)$ внутри $\Omega$ и будем стягивать $\Omega$ в эту точку, а $\Delta t$ устремим к нулю, так что $t_1$ и $t_2$ стремятся к $t$. Применим формулу конечных приращений:

$$u(M,t_2)-u(M,t_1)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_3}\Delta t,\quad t_3\in(t_1,t_2),$$

тогда получим

$$\iiint\limits_{\Omega} C\,\rho\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_3}\Delta t\,d\tau_M = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_{\Omega} div(k\cdot grad\,u)\,d\tau_M +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_{\Omega} F(M,t)\,d\tau_M .$$

К каждому из интегралов применим теорему о среднем:

$$\Delta t\cdot\Omega\cdot C\cdot\rho\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_3\\ M=M_1}} = \left.div(k\cdot grad\,u)\right|_{\substack{t=t_4\\ M=M_2}}\cdot\Delta t\cdot\Omega +$$

$$+\left.F(M,t)\right|_{\substack{t=t_5\\ M=M_3}}\cdot\Delta t\cdot\Omega,\ t_4,t_5\in(t_1,t_2),\quad M_1,M_2,M_3\in\Omega.$$

Сокращая на $\Omega\cdot\Delta t$ и осуществляя предельный переход, получим $C\,\rho\dfrac{\partial u(\widetilde{M},t)}{\partial t}=div(k\cdot grad\,u)+F(\widetilde{M},t).$

Учитывая, что точка $\widetilde{M}$ выбрана произвольно, будем иметь дифференциальное уравнение

$$C\rho\frac{\partial u(M,t)}{\partial t}=div(k\cdot grad\,u(M,t))+F(M,t),$$

$M=M(x,y,z)\in\Omega$, или

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+F.$$

В частности, если среда однородна $(k=const)$, то $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{F}{C\rho}$, где $a^2=\frac{k}{C\rho}$ – коэффициент температуропроводности. В более короткой форме записи

$$u_t=a^2\Delta u+f, \qquad (1.2)$$

$f=\frac{F}{C\rho}$, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Уравнение (1.2) называется уравнением теплопроводности в пространстве, оно относится к уравнениям параболического типа. Если $f=0$ (т.е. внутри тела отсутствуют тепловые источники), то уравнение будет однородным: $u_t=a^2\Delta u$. Если функция $u(M,t)$ зависит только от одной пространственной переменной (допустим, от $x$), т.е. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, то уравнение будет иметь вид $u_t=a^2u_{xx}+f$. Последнее уравнение возникает, например, при описании процесса распространения тепла в стержне, если предположить, что в каждый момент времени изотермические сечения стержня совпадают с его поперечными сечениями $x=const$, а форма этих сечений постоянна; температура такого стержня в каждый момент времени зависит лишь от одной пространственной переменной $x$ (но не от $y$ или $z$). Однако рассматриваемый стержень может иметь боковую поверхность, через которую возможен обмен теплом с внешней средой. Если считать, что температура внешней среды $u_{среды}$ постоянна, а плотность потока тепла, покидающего стержень через боковую поверхность, пропорциональна разности $u(x,t)-u_{среды}$, то получим уравнение $u_t = a^2 u_{xx} - b\cdot\left(u(x,t)-u_{среды}\right)+f$, где $b = const > 0$.

## § 2. Постановка начально-краевых задач.

**2.1** Для построения математической модели распространения тепла в теле необходимо к уравнению (1.2) добавить дополнительные условия. Такими условиями являются, например, начальное условие, определяющее температуру во всех точках тела в начальный момент времени, и граничное условие. Так как уравнение содержит только первую производную по времени, то достаточно лишь одного начального условия.

Если граница $S$ области $\Omega$ поддерживается при заданной температуре, то

$$u(P,t)=\mu(P,t), \quad P\in S, \quad t\ge 0,$$

где $\mu(P,t)$ – заданная функция. Это условие называется граничным условием I рода или условием Дирихле.

Если на поверхности $S$ задан тепловой поток, то

$$-k(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}=W_n(P,t), \quad P\in S, \quad t\ge 0,$$

где $k(P)$, $W_n(P,t)$ – заданные функции, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к поверхности $S$ в точке $P\in S$. Так как $k(P)\neq 0$, то это условие можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}=\nu(P,t),\quad \nu(P,t)=-\frac{W_n(P,t)}{k(P)},\quad P\in S,\quad t\geq 0.$$

Это условие называется граничным условием II рода или условием Неймана.

Если на границе $S$ области $\Omega$ происходит теплообмен с внешней средой, то по закону Ньютона получим третье краевое условие:

$$\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}+h(P)u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\quad t\geq 0,$$

где $h(P)$, $\chi(P,t)$ – заданные функции, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к $S$ в точке $P\in S$.

Подводя итог, можно поставить общую задачу:

$$C(M)\cdot\rho(M)\cdot u_t=div(k(M)\cdot grad\,u)+F(M,t),$$

$$M\in\Omega,\quad t>0,$$

$$u(M,0)=\varphi(M),\quad M\in\overline{\Omega}=\Omega\cup S,$$

$$\alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}+\beta(P)u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\quad t\geq 0,$$

где $C(M), \rho(M), k(M), F(M,t), \varphi(M), \alpha(P), \beta(P), \chi(P,t)$ – известные функции. Заданное функциями $\alpha, \beta, \chi$ общее граничное условие может возникнуть, если в некоторых точках границы $S$ известны значения искомой температуры, в других точках границы – плотности тепловых потоков, в третьих – происходит обмен теплом с внешней средой по закону Ньютона и действуют источники тепла. Такое граничное условие называется локальным: оно записывается в каждой отдельной точке $P\in S$; возможны и нелокальные граничные условия, связывающие информацию о функции $u$ в различных точках границы.

**Замечание.** Если $\alpha \equiv 0$, $\beta \neq 0$, то имеем граничное условие Дирихле. Если $\alpha \neq 0$, $\beta \equiv 0$, то – граничное условие Неймана. В задаче именно с третьим краевым условием (а не с краевым условием Дирихле и не с краевым условием Неймана) $\alpha(P) \neq 0$ всюду на $S$. Тогда краевое условие $\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta \cdot u = \chi$ можно записать в виде $\dfrac{\partial u}{\partial n} + h \cdot u = \eta$, где $h = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $\eta = \dfrac{\chi}{\alpha}$.

Мы будем изучать задачи только с краевыми условиями Дирихле и Неймана.

**2.2** Рассмотрим теперь уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной, т.е. будем искать распределение температуры внутри стержня длины $l$, у которого все точки поперечного сечения имеют одинаковую температуру. Направим ось $x$ вдоль стержня. Тогда начально-краевая задача будет представлена так:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l],$$

I краевая задача: $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$, $t \geq 0$,

II краевая задача: $u_x(0,t) = \nu_1(t)$, $u_x(l,t) = \nu_2(t)$, $t \geq 0$.

Так как в действительности решаются поставленные выше задачи при $0 \leq t \leq T$, то фазовая область для этих задач представляет собой прямоугольник ABCD в системе координат $(x,t)$ на плоскости этих переменных, где вершины прямоугольника имеют координаты $A(0,0)$, $B(l,0)$, $C(l,T)$, $D(0,T)$. Уравнение $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ выполняется внутри прямоугольника ABCD, включая границу CD. Начальное условие $u(x,0)=\varphi(x)$ выполняется на границе AB. А граничные условия выполняются на границах AD и BC. Если потребовать, чтобы уравнение удовлетворялось бы, например, на границе AB, т.е. при $t=0$, то тогда необходимо, чтобы выполнялось условие $\varphi''(x)=u_{xx}(x,0)$. Это требование существенно сузило бы класс функций, которые разумно считать решениями задачи.

Задача может быть смешанной; в этом случае, например, на левом конце будет I краевое условие, на правом – II краевое условие или наоборот.

**Задача.** Пусть $W=const>0$. Какой физический смысл имеет каждое из следующих краевых условий: $u_x(0,t)=-\dfrac{W}{k}$, $u_x(0,t)=\dfrac{W}{k}$, $u_x(l,t)=-\dfrac{W}{k}$, $u_x(l,t)=\dfrac{W}{k}$? #

Рассмотрим некоторые предельные (асимптотические) случаи.

Допустим, что длина стержня достаточно велика, а изучается распределение температуры стержня вдали от его концов и в тот период времени, за который краевые условия не успеют повлиять на температуру. Тогда получим задачу на всей числовой оси:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad x\in(-\infty,\infty),\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(-\infty,\infty).$$

Эта задача называется задачей с начальными условиями для уравнения теплопроводности или задачей Коши для уравнения теплопроводности.

Может быть другая предельная задача: краевое условие на левом конце сказывается на температуре рассматриваемого участка стержня, а краевое условие на правом конце – нет. Тогда получаем задачу на полубесконечной оси:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,\infty), \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,\infty),$$
I краевая задача: $u(0,t) = \mu(t), \quad t \geq 0,$

II краевая задача: $u_x(0,t) = \nu(t), \quad t \geq 0.$

Можно рассматривать задачи, предельные не только в пространстве, но и по времени, т.е. возможна постановка задачи без начальных условий.

**2.3.** Уточним математическую постановку начально–краевых задач в четырёхмерном пространстве $R^3 \times [0,T]$. Будем рассматривать в пространстве $R^3$ область $\Omega$, ограниченную поверхностью $S$. Назовём открытым цилиндром в $R^3 \times [0,T]$ область $Q_T$ вида $Q_T = \Omega \times (0,T] = \{(M,t) : M \in \Omega, t \in (0,T]\}$, замкнутым цилиндром – область $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0,T] = \{(M,t) : M \in \overline{\Omega}, t \in [0,T]\}$, где $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$. Если $T = \infty$, то полагаем $Q = Q_T$.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности ставится следующим образом:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), \quad (M,t) \in Q, \tag{2.1}$$
$$u(M,0) = \varphi(M), \quad M \in \overline{\Omega}, \tag{2.2}$$
$$\alpha \frac{\partial u(P,t)}{\partial n} + \beta u(P,t) = \chi(P,t), \quad P \in S, \quad t \in [0,\infty) \tag{2.3}$$
$$\alpha + \beta > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Дадим определения классических решений начально-краевых задач.

**Определение.** Классическим решением первой начально-краевой задачи $(\alpha \equiv 0, \beta \neq 0)$ называется функция $u(M,t)$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

– $u(M,t)$ непрерывна в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$;

- $u(M,t)$ имеет непрерывные производные $u_t$, $u_{xx}$, $u_{yy}$, $u_{zz}$ $(M = M(x,y,z))$ в открытом цилиндре $Q_T$ и удовлетворяет в нём уравнению (2.1);
- $u(M,t)$ принимает заданные в (2.2) значения при $t=0$;
- $u(M,t)$ удовлетворяет краевому условию $u(P,t)=\mu(P,t)$, $P \in S$, при $t \geq 0$.

$$u(M,t) \in C(\overline{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T). \#$$

**Определение.** Классическим решением второй начально-краевой задачи $(\alpha \neq 0, \beta \equiv 0)$ называется функция $u(M,t)$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

- $u(M,t)$ непрерывна в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$;
- $u(M,t)$ имеет непрерывные производные $u_x$, $u_y$, $u_z$ $(M = M(x,y,z))$ в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$ (кроме, быть может, внутренних точек области $\Omega$ в момент времени $t=0$);
- $u(M,t)$ имеет непрерывные производные $u_t$, $u_{xx}$, $u_{yy}$, $u_{zz}$ в открытом цилиндре $Q_T$ и удовлетворяет в нём уравнению (2.1);
- $u(M,t)$ принимает заданные в (2.2) значения при $t=0$;
- $u(M,t)$ удовлетворяет краевому условию $\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n} = \nu(P,t)$, $P \in S$, при $t \geq 0$.

$$u(M,t) \in C(\overline{Q}_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T). \#$$

**Замечание 1.** Необходимым условием существования классического решения начально-краевой задачи (2.1) – (2. 3) является согласование начального условия (2.2) и краевого условия (2.3), т.е.

$$\alpha \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} + \beta\varphi(P) = \chi(P,0), \quad P \in S.$$

**Замечание 2.** Часто возникают задачи, решения которых не могут удовлетворять требованиям, предъявляемым к **классическим** решениям. Например, может не выполняться согласование начального и краевого условий. Такие решения надо понимать в некотором **обобщённом** смысле. В настоящем курсе рассматриваются только классические решения.

В отношении поставленных задач возникают вопросы о единственности решения задачи, о существовании решения задачи, о непрерывной зависимости решения задачи (**об устойчивости**) от дополнительных условий. Если поставленная задача удовлетворяет этим трём условиям, то такая задача называется **корректно поставленной**.

**Пример.** Классическим решением задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l;$$
$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0,$$

называется функция $u(x,t) \in C(\{0 \le x \le l\} \times \{0 \le t \le T\}) \cap C^{2,1}(\{0 < x < l\} \times \{0 < t \le T\})$, удовлетворяющая уравнению теплопроводности (в данном примере – однородному), начальному условию и краевым условиям I рода на концах отрезка. Предположения о заданных функциях $\varphi$, $\mu_1$, $\mu_2$: $\varphi(x) \in C(0 \le x \le l)$, $\mu_{1,2}(t) \in C(0 \le t \le T)$, $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(0)$. #

**Задача.** Сформулируйте определение классического решения второй начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке

$0 \le x \le l$. Каким требованиям должны удовлетворять заданные в ней функции? #

**Задача.**

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l;$$
$$u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = \nu(t), \quad t \ge 0.$$

Сформулируйте определение классического решения этой задачи. Каким требованиям должны удовлетворять функции $f, \varphi, \mu, \nu$? #

## § 3. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы сравнения.

**3.1** Следующая теорема является основной, из неё будут получены важнейшие следствия, описывающие свойства решений уравнения теплопроводности.

**Теорема (принцип максимума).**

Решение однородного уравнения теплопроводности $u_t = a^2 \cdot \Delta u$, $(M,t) \in Q_T$, непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может принимать значения, большие, чем значения при $t = 0$ или на границе $S$ области $\Omega$.

Доказательство.

Введём обозначение $A = \max\left\{ \underset{M \in \overline{\Omega}}{u(M,0)}; \quad \underset{P \in S;\, t \in [0,T]}{u(P,t)} \right\}$. Надо доказать, что $u(M,t) \le A$ для всех точек $(M,t) \in \overline{Q}_T$.

Это утверждение будем доказывать от противного. Пусть в точке $(M_0, t_0) \in Q_T$ функция $u(M,t)$ достигает своего максимального значения, большего $A$, т.е. $u(M_0, t_0) = A + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $v(M,t) = u(M,t) + \alpha(t_0 - t)$, $\alpha > 0$. Очевидно,

$v(M_0,t_0)=u(M_0,t_0)=A+\varepsilon$. Теперь оценим максимальное значение $v(M,t)$ на границе области $\overline{\Omega}$ или в начальный момент времени:

$$\max\left\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{v(M,0)};\quad \underset{P\in S;\, t\in[0,T]}{v(P,t)}\right\}\le A+\alpha T<A+\frac{\varepsilon}{2},\ \text{если}\quad \alpha<\frac{\varepsilon}{2T}.$$

Таким образом, максимальное значение функции $v(M,t)$ на границе цилиндра меньше, чем некоторое её значение внутри. Следовательно, существует точка $(M_1,t_1)$ внутри цилиндра, в которой функция должна достигать своего максимума: $(M_1,t_1)\in Q_T$, $v(M_1,t_1)\ge v(M_0,t_0)=A+\varepsilon$. Так как $(M_1,t_1)$ – точка максимума, то должны выполняться условия для первых производных: $grad_M v(M_1,t_1)=0$, $\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1\\ M=M_1}}\ge 0$ ($\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1\\ M=M_1}}=0$, если $t\ne T$, или $\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=T\\ M=M_1}}\ge 0$) и для вторых производных: $\Delta v(M_1,t_1)\le 0$. Посмотрим, что это даёт для функции $u(M,t)$:

$$u(M,t)=v(M,t)-\alpha(t_0-t),\quad \alpha>0;$$

$$grad_M u(M_1,t_1)=grad_M v(M_1,t_1)=0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{M=M_1\\ t=t_1}}=\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{M=M_1\\ t=t_1}}+\alpha\ge\alpha>0;$$

$$\Delta u(M_1,t_1)=\Delta v(M_1,t_1)\le 0.$$

Таким образом в точке $(M_1,t_1)$, лежащей внутри области $Q_T$, $\Delta u\le 0$, $u_t>0$, т.е. не выполняется уравнение теплопроводности. Пришли к противоречию, теорема доказана.

**Замечание.** Принцип максимума является выражением того очевидного факта, что тепло перемещается от мест с большей температурой к местам с меньшей температурой, т.е. «растекается». При отсутствии источников и стоков тепла это и приводит к доказанному только что утверждению. #

Для однородного уравнения теплопроводности справедлив и принцип минимума:

**Теорема.** Решение однородного уравнения теплопроводности $u_t = a^2 \cdot \Delta u$, $(M,t) \in Q_T$, непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может принимать значения, меньшие, чем значения при $t = 0$ или на границе $S$ области $\Omega$.

Доказательство.

Функция $u_1(M,t) = -u(M,t)$ – тоже решение уравнения теплопроводности. Минимальное значение для функции $u_1(M,t)$ является максимальным для функции $u(M,t)$. Следовательно, справедливость этой теоремы следует из предыдущей.

**Следствие.** Из доказанных теорем следует принцип экстремума: значения функции $u(M,t)$ для всех точек $(M,t) \in \overline{Q}_T$ лежат между максимальным и минимальным значениями функции на границе, т.е.

$$\min\left\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{u(M,0)};\ \underset{P\in S;\, t\in[0,T]}{u(P,t)}\right\} \le u(M,t) \le \max\left\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{u(M,0)};\ \underset{P\in S;\, t\in[0,T]}{u(P,t)}\right\}.$$

**Замечание.** Функция $u(M,t) = const$ является решением уравнения $u_t = a^2 \cdot \Delta u$ и не противоречит принципам максимума и минимума.

**3.2 Теорема сравнения 1.** Пусть функции $u_i(M,t)$, $i = 1,2$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t = a^2 \cdot \Delta u$, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяют условиям $u_1(M,0) \geq u_2(M,0)$, $M \in \overline{\Omega}$, и $u_1(P,t) \geq u_2(P,t)$, $P \in S$, $t \in [0,T]$. Тогда $u_1(M,t) \geq u_2(M,t)$ во всех точках замкнутого цилиндра $\overline{Q}_T$.

Доказательство.

Введём функцию $v(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$. Пусть функция $v(M,t)$ не равна тождественно нулю, в противном случае утверждение теоремы очевидно. Так как уравнение $u_t = a^2 \cdot \Delta u$ линейно и однородно, то линейная комбинация решений тоже является решением этого уравнения. Следовательно, функция $v(M,t)$ является решением уравнения $v_t = a^2 \cdot \Delta v$, $v(M,t) \in C(\overline{Q}_T)$. Т.е. функция $v(M,t)$ – классическое решение уравнения $v_t = a^2 \cdot \Delta v$, и выполнены неравенства $v(M,0) \geq 0$, $M \in \overline{\Omega}$, и $v(P,t) \geq 0$, $P \in S$, $t \in [0,T]$. Для функции $v(M,t)$ выполняется принцип минимума. Следовательно, $v(M,t) \geq 0$, $(M,t) \in \overline{Q}_T$, и $u_1(M,t) \geq u_2(M,t)$, $(M,t) \in \overline{Q}_T$. Теорема доказана.

**Теорема сравнения 2.** Пусть функции $u_i(M,t)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t = a^2 \cdot \Delta u$, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяют условиям $|u_1(M,0) - u_2(M,0)| \leq \varepsilon$, $M \in \overline{\Omega}$, и $|u_1(P,t) - u_2(P,t)| \leq \varepsilon$, $P \in S$, $t \in [0,T]$. Тогда $|u_1(M,t) - u_2(M,t)| \leq \varepsilon$ во всех точках замкнутого цилиндра $\overline{Q}_T$.

Доказательство.

Рассмотрим три функции: $v_1(M,t) = -\varepsilon$, $v_3(M,t) = \varepsilon$ и $v_2(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$. Все функции $v_i(M,t)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют уравнению $v_t = a^2 \cdot \Delta v$, принадлежат классу непрерывных функций $C(\overline{Q}_T)$ и удовлетворяют условиям $v_1(M,0) \le v_2(M,0) \le v_3(M,0)$, $M \in \overline{\Omega}$, и $v_1(P,t) \le v_2(P,t) \le v_3(P,t)$, $P \in S$, $t \in [0,t]$. Из принципов максимума и минимума следует $v_1(M,t) \le v_2(M,t) \le v_3(M,t)$, $(M,t) \in \overline{Q}_T$. Теорема доказана.

**Замечание.** Принципы максимума и минимума имеют место и для более общего уравнения $C\rho u_t = div(k(M) \cdot grad\, u) - qu$, $q \ge 0$.

## § 4. Единственность и устойчивость решения первой начально – краевой задачи для уравнения теплопроводности.

**4.1** Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), \quad (M,t) \in Q_T \tag{4.1}$$

$$u(M,0) = \varphi(M), \quad M \in \overline{\Omega} \tag{4.2}$$

$$u(P,t) = \mu(P,t), \quad P \in S, \quad t \in [0,T] \tag{4.3}$$

Для существования классического решения этой задачи функции $\varphi(M)$ и $\mu(P,t)$ должны быть согласованы, т.е. $\varphi(P) = \mu(P,0)$, $P \in S$ (4. 4).

**Теорема единственности решения.**

Задача (4.1) – (4.3) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство.

Допустим, что существуют две функции $u_i(M,t)$, $i=1,2$, являющиеся классическими решениями задачи (4.1) – (4.3). Функции $u_i(M,t)\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{(2,1)}(Q_T)$, $i=1,2$. Тогда функция $v(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$ является классическим решением задачи

$$v_t=a^2\Delta v\,,\quad (M,t)\in Q_T$$

$$v(M,0)=0\,,\quad M\in\overline{\Omega}$$

$$v(P,t)=0\,,\quad P\in S\,,\quad t\in[0,T],\quad v\in C(\overline{Q}_T).$$

Для функции $v(M,t)$ справедливы принципы максимума и минимума. ( Для функций $u_i(M,t)$, $i=1,2$ принципы максимума и минимума не применимы, так как они удовлетворяют неоднородному уравнению). Следовательно, $v(M,t)$ удовлетворяет принципу экстремума: $0\le v(M,t)\le 0$, т.е. $v(M,t)\equiv 0$. Теорема доказана.

**4.2** Рассмотрим понятие устойчивости краевой задачи.

**Определение.** Решение задачи (4.1) – (4.3) называется устойчивым, если малым изменениям начальных и граничных условий соответствует малое изменение решения.

**Теорема об устойчивости решения.**

Классическое решение задачи (4.1) – (4.3) устойчиво по начальным и граничным условиям.

Доказательство.

Пусть функции $u_i(M,t)$, $i=1,2$, являются решениями задач

$$u_t = a^2\Delta u + f(M,t), \quad (M,t)\in Q_T$$
$$u(M,0)=\varphi_i(M), \quad M\in\overline{\Omega}$$
$$u(P,t)=\mu_i(P,t), \quad P\in S, \quad t\in[0,T], \quad i=1,2.$$

Предположим, что $|\varphi_1(M)-\varphi_2(M)|\le\varepsilon$, $M\in\overline{\Omega}$, и $|\mu_1(P,t)-\mu_2(P,t)|\le\varepsilon$, $P\in S$, $t\in[0,T]$. Надо доказать, что $|u_1(M,t)-u_2(M,t)|\le\varepsilon$ для всех $(M,t)\in\overline{Q}_T$. Рассмотрим функцию $v(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$, которая является решением задачи

$$v_t = a^2\Delta v, \quad (M,t)\in Q_T$$
$$v(M,0)=\varphi_1(M)-\varphi_2(M), \quad M\in\overline{\Omega}$$
$$v(P,t)=\mu_1(P,t)-\mu_2(P,t), \quad P\in S, \quad t\in[0,T].$$

Так как функция $v(M,t)$ в граничных и начальных точках удовлетворяет условиям $|v(M,0)|\le\varepsilon$, $M\in\overline{\Omega}$, и $|v(P,t)|\le\varepsilon$, $P\in S$, $t\in[0,T]$, то из теоремы сравнения 2 следует, что $|v(M,t)|\le\varepsilon$, $(M,t)\in\overline{Q}_T$. Это и требовалось доказать.

## §5. Построение решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности на отрезке методом разделения переменных.

**5.1** Метод разделения переменных является одним из основных методов построения решений линейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных. Идея метода состоит в том, что нетривиальные частные решения данного уравнения с независимыми переменными $x$ и $t$ ищутся в виде произведения $X(x)\cdot T(t)$, где $X$ зависит только от $x$, а $T$— только от $t$.Это сводит задачу для уравнения в частных производных к некоторой совокупности задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решим методом разделения переменных первую краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx} \,, 0 < x < l \,, t > 0 \,;$$
$$u(0,t) = 0 \,, u(l,t) = 0 \,, t \geq 0 \,;$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \,, 0 \leq x \leq l \,.$$

Сначала найдём частные решения уравнения вида $X(x) \cdot T(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям. Если подставить произведение $X(x) \cdot T(t)$ в уравнение и разделить его на $a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$, то получим равенство

$$\frac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = \frac{T'_t(t)}{a^2 T(t)} \,,$$

левая часть которого зависит только от $x$, а правая – только от $t$. Поскольку $x$ и $t$ являются независимыми переменными, равенство возможно только если обе его части равны постоянной. Обозначим эту действительную постоянную через $(-\lambda)$ и запишем отдельно два уравнения относительно $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''_{xx}(x) + \lambda \cdot X(x) = 0 \,;$$

$$T'_t(t) + a^2 \cdot \lambda \cdot T(t) = 0 \,.$$

Подставим теперь произведение $X(x) \cdot T(t)$ в краевые условия и вспомним, что они выполнены при всех $t \geq 0$. Отсюда для рассматриваемой начально-краевой задачи получаем $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Чтобы найти интересующие нас функции $X(x)$, надо решить краевую задачу Штурма-Лиувилля на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения относительно $X(x)$:

$$\begin{cases} X''_{xx}(x)+\lambda\cdot X(x)=0\,,\,0\le x\le l\,; \\ X(0)=0\,,\,X(l)=0\,. \end{cases}$$

Решение полученной задачи Штурма-Лиувилля было построено в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений, где было доказано, что имеется бесконечная последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}$, все они действительны и каждому из них отвечает одна собственная функция $X_n(x)$ ( с точностью до ненулевого постоянного множителя ). Для рассматриваемых краевых условий первого рода $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\, X_n(x)=\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),\, n=1,2,3,\dots$.

Если задача Штурма-Лиувилля решена, то уравнение для $T(t)$ надо решать только при тех $\lambda$, которые оказались собственными значениями задачи для $X(x)$. При каждом таком $\lambda_n$ надо найти общее решение уравнения относительно $T(t)$. В силу линейности исходной задачи сумма произведений $X_n(x)\cdot T_n(t)$, отвечающих различным $\lambda_n$, будет удовлетворять уравнению в частных производных и нулевым краевым условиям исходной начально-краевой задачи. Чтобы найти окончательное ее решение, надо выбрать коэффициенты этой линейной комбинации, исходя из оставшегося пока неиспользованным начального условия. Иными словами, из всевозможных решений исходного уравнения $u(x,t)=\sum\limits_n X_n(x)\cdot T_n(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям , надо отобрать единственное решение, удовлетворяющее начальному условию. Для рассматриваемых краевых условий первого рода получаем

$$T_n(t)=C_n\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cdot t\right\},\ C_n=const\ ,\ n=1,2,3,\ldots,$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cdot t\right\}$$

– удовлетворяющее краевым условиям общее решение уравнения теплопроводности. Коэффициенты $C_n$ можно найти из начального условия:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\varphi(x).$$

Для этого надо разложить заданную на $[0,l]$ функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе функций $\{X_n(x)\}$ на указанном отрезке (в рассматриваемом случае – по системе $\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ). Тогда $C_n$ равны коэффициентам Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{X_n(x)\}$.

Построенное решение является пока лишь формальным: надо ещё доказать, что оно удовлетворяет требованиям, предъявляемым к классическим решениям. В частности, надо доказать, что полученный функциональный ряд можно почленно дифференцировать по $t$ и два раза – по $x$. Для этого нужны некоторые дополнительные предположения о функции $\varphi(x)$.

В начально-краевых задачах с другими комбинациями краевых условий I и II рода на концах отрезка $0 \le x \le l$ мы придём к следующим задачам Штурма-Лиувилля и их решениям (проверьте!).

$$\begin{cases} X''_{xx}(x) + \lambda \cdot X(x) = 0, 0 \le x \le l; & \lambda_0 = 0, \lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2, n = 1,2,... \\ X'_x(0) = 0, \quad X'_x(l) = 0, & X_0(x) \equiv 1, \quad X_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''_{xx}(x) + \lambda \cdot X(x) = 0, 0 \le x \le l; & \lambda_n = \left(\dfrac{\pi}{2l}(2n+1)\right)^2, n = 0,1,2,... \\ X(0) = 0, \quad X'_x(l) = 0, & X_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2l}(2n+1)x\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''_{xx}(x) + \lambda \cdot X(x) = 0, 0 \le x \le l; & \lambda_n = \left(\dfrac{\pi}{2l}(2n+1)\right)^2, n = 0,1,2,... \\ X'_x(0) = 0, \quad X(l) = 0, & X_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2l}(2n+1)x\right). \end{cases}$$

**5.2** Раскладывая решение начально-краевой задачи в ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$, мы предполагаем, что введено некоторое скалярное произведение функций. Скалярное произведение двух заданных на $[0,l]$ действительных функций $f(x)$ и $g(x)$ можно определить выражением $(f,g) = \int\limits_0^l f(x) \cdot g(x) dx$. Евклидова норма функции $f(x)$ – это $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$. В рассмотренной первой начально-краевой задаче легко проверить, что $(X_i, X_j) = 0$ при $i \ne j$, то есть система

$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна. $\|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{l}{2}$.

Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по ненормированной системе элементов $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определяются так: $\varphi_n = \dfrac{(\varphi, X_n)}{\|X_n\|^2}$, $n = 1, 2, \ldots$ .

**Задача.** Проверьте ортогональность систем собственных функций $\{X_n(x)\}$ для других рассмотренных в 5.1 случаев. Найдите $\|X_n\|^2$. #

**Задача.** Методом разделения переменных решите вторую краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности. #

**5.3** Чтобы решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ с нулевыми краевыми условиями и нулевым начальным условием , решим сначала задачу Штурма-Лиувилля, отвечающую однородному уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ с теми же краевыми условиями. Разложим $f(x,t)$ при каждом фиксированном $t$ в ряд Фурье по системе $\{X_n(x)\}$ собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:

$$f(x,t) = \sum_n f_n(t) X_n(x) \quad , \quad \text{где} \quad f_n(t) = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2} \text{ —}$$

коэффициенты Фурье заданной функции $f$ (здесь $t$ играет роль параметра). Теперь решение исходной задачи при фиксированном $t$ можно искать в виде ряда Фурье по системе $\{X_n(x)\}$: $u(x,t) = \sum_n T_n(t) X_n(x)$, где коэффициенты Фурье $T_n(t)$ подлежат определению.

Чтобы найти их, подставим предполагаемый вид решения в уравнение. Например, в случае первой краевой задачи получим $X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x$, и тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(t)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Если $u(x,0)\equiv 0$, то $\sum_n T_n(0)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\equiv 0$. Отсюда при каждом $n=1,2,\ldots$ получаем для нахождения $T_n(t)$ задачу

Коши: $\begin{cases} T_n'(t)+a^2\cdot\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cdot T_n(t)=f_n(t), \quad t\geq 0; \\ T_n(0)=0. \end{cases}$

**Пример.**

$u_t=a^2u_{xx}+f_0,\ 0<x<l,\ t>0;\ f_0=const;$

$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t>0;$

$u(x,0)=0,\ 0\leq x\leq l.$

**Решение.**

$X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x,\ n=1,2,3,\ldots,$ — собственные функции задачи Штурма - Лиувилля.

Коэффициенты Фурье постоянной функции $f_0$ по $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равны

$$f_n=\frac{2}{l}\int_0^l f_0\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx=\begin{cases} 0,\ если\ n=2k, \\ \frac{4f_0}{\pi n},\ если\ n=2k+1. \end{cases}$$

Разложение её в ряд Фурье по $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на интервале $0<x<l$ имеет вид $f_0=\frac{4f_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2k+1)}{l}x}{2k+1}$. Для

определения коэффициентов Фурье решения исходной задачи получаем задачи Коши:

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t)=0\,, \qquad T_n'(t)+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t)=\frac{4f_0}{\pi n}\,,$$

$$T_n(0)=0\,, \qquad\qquad T_n(0)=0\,,$$

$$\textit{если} \quad n=2k\,; \qquad\qquad \textit{если} \quad n=2k+1\,.$$

Ненулевые коэффициенты Фурье равны

$$T_{2k+1}(t)=\frac{4f_0 l^2}{(\pi(2k+1))^3 a^2}\left(1-\exp\left(-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t\right)\right),\ k=0,1,2,\ldots .$$

$u(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}T_{2k+1}(t)\cdot\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{l}x$. Заметьте, что

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\frac{f_0}{2a^2}x\cdot(l-x)=\frac{4f_0 l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{l}}{(2k+1)^3}\,.\#$$

В случае других краевых условий надо пользоваться отвечающими им $\{X_n(x)\}$.

**Замечание.** Очевидно, что основным в методе разделения переменных является нахождение системы собственных функций $\{X_n\}$ задачи Штурма-Лиувилля. В случае отрезка $0\le x\le l$ для рассматриваемых краевых условий мы получаем некоторые системы тригонометрических функций. Применение метода разделения переменных к многомерным задачам приводит к специальным функциям математической физики – в зависимости от области $\Omega$ и заданных краевых условий.

## § 6. Метод разделения переменных для доказательства существования решения начально – краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

**6.1** В § 4 были доказаны теоремы единственности и устойчивости для первой начально – краевой задачи любой размерности. Для корректной постановки задачи необходимо существование решения задачи. В этом параграфе будет рассмотрена теорема существования для начально – краевой задачи в случае одной пространственной переменной, т.е. в случае, когда $\Omega = (0,l)$. Чтобы подчеркнуть это, введём обозначения:

$$\omega_l = \{x : 0 < x < l\}, \quad \overline{\omega}_l = \{x : 0 \le x \le l\},$$
$$q_l = \omega_l \times (0,\infty) = \{(x,t) : x \in \omega_l,\, t > 0\},$$
$$q_{l,T} = \{(x,t) : x \in \omega_l,\, 0 < t \le T\},$$
$$\overline{q}_l = \overline{\omega}_l \times [0,\infty) = \{(x,t) : x \in \overline{\omega}_l,\, t \ge 0\},$$
$$\overline{q}_{l,T} = \{(x,t) : x \in \overline{\omega}_l,\, 0 \le t \le T\}.$$

Рассмотрим первую краевую задачу на отрезке $[0,l]$ для уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \omega_l, \quad t > 0, \tag{6.1}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\omega}_l, \tag{6.2}$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{6.3}$$

Необходимым условием существования классического решения является $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Классическое решение $u(x,t) \in C(\overline{q}_l) \cap C^{(2,1)}(q_l)$. Общая схема метода разделения переменных даёт решение этой задачи, построенное формально:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x\,, \qquad (6.4)$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx\,, \quad n=1,2,..... \qquad (6.5).$$

Покажем, что при некоторых условиях на функцию $\varphi(x)$ ряд (6.4) с коэффициентами (6.5) представляет собой классическое решение этой задачи. Для этого необходимо воспользоваться обобщенным принципом суперпозиции и свойствами рядов Фурье.

**Лемма (обобщенный принцип суперпозиции).** Пусть $u_n(x,t)$, $n=1,2,3,...$, – частные решения линейного однородного дифференциального уравнения $L[u_n]=0$, и все дифференциальные операции над функцией $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t)$ можно проводить путём почленного дифференцирования ряда. Тогда функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $L[u]=0$.

Доказательство.

$$L[u]=L\left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty} C_n L[u_n]=0\,.$$

**Теорема о рядах Фурье.**

Пусть функция $F(x)$, заданная на отрезке $x\in[-l,l]$, периодически продолжена на всю числовую ось с периодом $2l$. Если $F(x)$ имеет на интервале $(-l,l)$ $k$ непрерывных производных, а $(k+1)$ – ая производная кусочно- непрерывна, то сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \{|a_n| + |b_n|\}$, где $a_n$ и $b_n$ – коэффициенты Фурье функции $F(x)$ по тригонометрической системе функций $\left\{\cos\frac{\pi n}{l}x,\ \sin\frac{\pi n}{l}x\right\}$:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

**Замечание.** Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $x \in [0, l]$, непрерывна на нём, имеет кусочно-непрерывную производную и $f(0) = f(l) = 0$. Чтобы $f(x)$ можно было разложить в ряд Фурье по синусам, нужно $f(x)$ нечётным образом продолжить на $[-l, l]$, т.е. положить $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < l \\ -f(-x), & -l < x < 0 \end{cases}$. Условие $f(0) = f(l) = 0$ гарантирует непрерывность функции, а нечётность продолжения гарантирует кусочную непрерывность первой производной.

**6.2 Теорема о существовании решения.**

Пусть функция $\varphi(x) \in C[0, l]$, имеет в области $x \in \overline{\omega}_l$ кусочно – непрерывную производную и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда задача (6.1) – (6.3) имеет классическое решение, представимое рядом (6.4) с коэффициентами (6.5).

Доказательство.

Ряд (6.4) с коэффициентами (6.5) удовлетворяет однородным условиям (6.3) $\left(\left.\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}\right|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0\right)$, а при

$t=0$ он переходит в ряд Фурье для функции $\varphi(x)$ в области $x \in \overline{\omega}_l$: $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x$. Ряд (6.4) является формальным решением задачи (6.1) – (6.3). Надо доказать, что сумма этого ряда в открытой области удовлетворяет уравнению теплопроводности, а в замкнутой области является непрерывной функцией. Докажем, что сумма ряда (6.4) непрерывна при $x \in \overline{\omega}_l$, $t \ge 0$. Ряд (6.4) мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|$, который сходится по теореме о рядах Фурье (в нашем случае $k=0$ и все $a_n=0$). В силу признака Вейерштрасса ряд (6.4) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{q}_l$, а его сумма является непрерывной функцией в области $\overline{q}_l$. Таким образом, $u(x,t) \in C(\overline{q}_l)$. Следовательно, при $t \to 0$ функция $u(x,t)$, заданная формулой (6.4), удовлетворяет условию (6.2), а при $x \to 0$ и $x \to l$ – условию (6.3).

Покажем далее, что при $t \ge \bar{t} > 0$ равномерно сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} \quad (6.6), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} \quad (6.7),$$

где $u_n(x,t)=C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x$. Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0,l]$, то она ограничена: $|\varphi(x)| \le M$, $x \in [0,l]$. Тогда

$|C_n|=\frac{2}{l}\left|\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx\right| \le 2M$. При $t \ge \bar{t}$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| = \left|-C_n\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\right| \le 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \bar{t}},$$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|-C_n\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\right| \le 2M\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \bar{t}}.$$

Мажорантные ряды имеют вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} N n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \bar{t}}$,

где $N$ – некоторая константа, для ряда (6.6) равная $N = 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$, для ряда (6.7) равная $N = 2M\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2$.

Сходимость мажорантного ряда следует из признака Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 (2n+1)\bar{t}} = 0$. Ряды (6.6) и (6.7) сходятся равномерно и, следовательно, ряд (6.4) можно дифференцировать почленно в области $q_{\bar{t}}$.

В силу обобщенного принципа суперпозиции функция $u(x,t)$, представимая рядом (6.4) с коэффициентами (6.5), является классическим решением начально – краевой задачи (6.1) – (6.3). Теорема доказана.

## § 7. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

**Постановка задачи:**

$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $(x,t) \in q$, (7.1)

где $q = \{(x,t):\ x \in R^1, t > 0\}$, $\bar{q} = \{(x,t):\ x \in R^1, t \ge 0\}$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in R^1$, (7.2) где $f(x,t)$, $\varphi(x)$ – заданные непрерывные функции, $u(x,t)$ – искомое решение задачи.

**Определение.** Классическим решением задачи (7.1) – (7.2) называется функция $u(x,t)$, определённая и непрерывная вместе со своими производными $u_t$ и $u_{xx}$ в $q$, удовлетворяющая уравнению (7.1) в $q$, непрерывная в $\overline{q}$ и удовлетворяющая условию (7.2).

**Замечание 1.** Для этой задачи пользоваться принципом максимума нельзя, так как область неограниченная.

**Замечание 2.** При решении задачи на бесконечной прямой существенным является требование ограниченности искомой функции во всей области, т.е. существование такого $M$, что $|u(x,t)| < M$ для всех точек $(x,t) \in \overline{q}$. Для неоднородного уравнения (7.1) это требование может и не выполняться.

**Теорема единственности.**

Задача (7.1) – (7.2) может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\overline{q}$.

Доказательство.

Предположим, что существуют два ограниченных решения $u_i(x,t)$, $i = 1, 2$, которые удовлетворяют задаче (7.1) – (7.2). Введём функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. В силу линейности задачи функция $v(x,t)$ будет удовлетворять однородной задаче Коши:

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (x,t) \in q, \tag{7.3}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in R^1. \tag{7.4}$$

Условие ограниченности для функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ даёт условие ограниченности для функции $v(x,t)$:

$|v(x,t)| = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| \le 2M$, где $|u_1(x,t)| \le M$, $|u_2(x,t)| \le M$. Таким образом, функция $v(x,t)$ является решением задачи (7.3) – (7.4) и ограничена в области $\bar{q}$. Покажем, что $v(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in q$. Выберем в полуплоскости $q$ линии $|x| = L$ и $t = T$ и будем рассматривать ограниченную область $q_L$: $q_L = [-L, L] \times (0, T]$, $\bar{q}_L = [-L, L] \times [0, T]$. Введём вспомогательную функцию $w(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$.

Функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению $w_t = a^2 w_{xx}$. Положим $t = 0$, тогда $w(x,0) = \frac{2Mx^2}{L^2} \ge |v(x,0)| = 0$. Пусть $|x| = L$, тогда $w(\pm L, t) = 2M + \frac{4Ma^2 t}{L^2} \ge 2M \ge |v(\pm L, t)|$. Так как область $q_L$ ограничена, внутри этой области функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности, а на границе выполняются условия $|v(x,0)| \le w(x,0)$ и $|v(\pm L,t)| \le w(\pm L,t)$, то к функциям $v(x,t)$ и $w(x,t)$ можно применить следствие из принципа максимума: $|v(x,t)| \le w(x,t)$, $(x,t) \in \bar{q}_L$, или $-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \le v(x,t) \le \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$. Зафиксируем точку $(x,t) \in \bar{q}_L$ и перейдём к пределу при $L \to \infty$, получим $\lim\limits_{L\to\infty} v(x,t) = 0$. В силу независимости $v(x,t)$ от $L$ и произвольности выбора точки $(x,t)$ получим, что всюду в области $\bar{q}$ $v(x,t) \equiv 0$. Следовательно,

$u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ в $\bar{q}$ и решение задачи единственно. Теорема доказана.

**Замечание.** В задаче (7.1) – (7.2) для однородного уравнения $(f \equiv 0)$ можно отказаться от ограниченности решения задачи Коши. Для этого введём класс функций, которые всюду в $\mathbf{R}^1$ и при всех $t \geq 0$ удовлетворяют неравенствам $|u(x,t)| < K \cdot \exp(N \cdot x^2)$ с некоторыми положительными постоянными $K$ и $N$ ($K$ и $N$ определяются функцией $u(x,t)$). В этом классе функций справедлива теорема единственности. #

## § 8. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона.

Перейдём к построению решения задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in q, \tag{8.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R^1. \tag{8.2}$$

Для этого проведём некоторые рассуждения на интуитивном уровне строгости. Строгое обоснование решения будет дано в § 9. Будем считать, что решение ограничено и воспользуемся методом разделения переменных. Решение будем искать в виде $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, в результате получим $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{a^2 T(t)}$. Поскольку $x$ и $t$ – независимые переменные, имеем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \quad \lambda = const. \tag{8.3}$$

Потребуем дополнительно ограниченности функций $X(x)$ и $T(t)$ в отдельности. В результате получим уравнения для $X(x)$ и $T(t)$:

$$\begin{cases} X'(x)+\lambda X(x)=0 \\ |X(x)|<M, \quad M=const \end{cases} \tag{8.4}$$

$$T'(t)+\lambda a^2 T(t)=0, \; |T(t)|<M. \tag{8.5}$$

Будем искать ненулевые решения уравнений (8.4) и (8.5). Решение уравнения (8.5) имеет вид $T(t)=A\cdot e^{-a^2\lambda t}$. Здесь $A$ – постоянная, которая, вообще говоря, зависит от $\lambda$. Для ограниченности решения потребуем $\operatorname{Re}\lambda\ge 0$. Решение уравнения (8.4) имеет вид $X(x)=B_1\cdot e^{i\sqrt{\lambda}x}+B_2\cdot e^{-i\sqrt{\lambda}x}$. Здесь $B_1$ и $B_2$ – постоянные, которые зависят от $\lambda$. Для ограниченности решения нужно, чтобы $\operatorname{Im}\lambda=0$, т.е. $0\le\lambda=k^2$, $k\in R^1$. Следовательно, имеем решения

$$\begin{cases} X(x)=B(k)\cdot e^{ikx}, \quad k\in R^1, \quad x\in R^1 \\ T(t)=A(k)\cdot e^{-a^2k^2t}, \quad t>0 \end{cases}$$

$$u(x,t,k)=C(k)\cdot e^{ikx-a^2k^2t}, \quad C(k)=A(k)\cdot B(k), \quad k\in R^1.$$

Функция $$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}C(k)\cdot e^{-a^2k^2t+ikx}dk \tag{8.6}$$

будет общим решением уравнения (8.1), если этот несобственный интеграл, зависящий от параметров $x$ и $t$, сходится в области $q$ к непрерывной функции $u(x,t)$, и существуют частные производные $u_t$ и $u_{xx}$, которые можно вычислять под знаком интеграла. Константа $C(k)$ находится из условия (8.2):

$$u(x,0)=\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(k)\cdot e^{ikx}dk\,. \qquad (8.7)$$

Соотношение (8.7) является разложением заданной функции $\varphi(x)$ в интеграл Фурье. $C(k)$ – преобразование Фурье функции $\varphi(x)$:

$$C(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-ik\xi}d\xi\,. \qquad (8.8)$$

Подчеркнём, что формулы (8.7) и (8.8) имеют смысл только при надлежащих предположениях о функции $\varphi(x)$. Поэтому проводимые здесь рассуждения – лишь интуитивный вывод решения задачи (8.1), (8.2).

Подставим формулу (8.8) в (8.6) и поменяем порядок интегрирования, тогда получим

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2k^2t+ik(x-\xi)}dk\right\}\varphi(\xi)d\xi \qquad (8.9).$$

Вычислим интеграл $J(\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2k^2+ik\alpha}dk$, который является внутренним интегралом в формуле (8.9) при $\beta^2=a^2t$, $\alpha=x-\xi$. Для этого вычислим его производную по $\alpha$:

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int_{-\infty}^{\infty}ike^{-\beta^2k^2+ik\alpha}dk=-\frac{i}{2\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik\alpha}d\left(e^{-\beta^2k^2}\right)=$$

$$=-\frac{i}{2\beta^2}e^{ik\alpha-\beta^2k^2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\frac{i}{2\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}i\alpha e^{-\beta^2k^2+ik\alpha}dk=-\frac{\alpha}{2\beta^2}J(\alpha,\beta).$$

Следовательно, для $J(\alpha,\beta)$ получили дифференциальное уравнение: $\dfrac{dJ(\alpha,\beta)}{d\alpha}+\dfrac{\alpha}{2\beta^2}J(\alpha,\beta)=0$. Его решение имеет вид

$$J(\alpha,\beta)=H(\beta)\cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}},$$

$$H(\beta)=J(0,\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2k^2}dk=\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}.$$

Отсюда $J(\alpha,\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}$. Подставляя $J\left(x-\xi,a\sqrt{t}\right)$ в формулу (8.9), получим **формальное** решение задачи Коши:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi .$$

**Определение.** Функция $G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ называется функцией Грина или фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Интеграл $u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ называется интегралом Пуассона.

Докажите самостоятельно свойства функции Грина:

1. Функция $G(x,\xi,t)$ определена при $t>0$ и удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным $x$ и $t$.
2. Функция $G(x,\xi,t)$ положительна при любых $x,\xi\in(-\infty,\infty)$ и любом $t>0$.
3. При $t=0$ функция $G(x,\xi,t=0)$ имеет особенность в точке $x=\xi$: $\lim\limits_{t\to 0+}G(\xi,\xi,t)=+\infty$.
4. Функция $G(x,\xi,t)$ удовлетворяет принципу взаимности $G(x,\xi,t)=G(\xi,x,t)$.

## § 9. Существование решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

**Теорема существования решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности.**

Пусть $\varphi(x)$ – непрерывная и ограниченная функция на числовой прямой: $\varphi(x)\in C$, $|\varphi(x)|<M$, $x\in R^1$. Тогда формула

$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ определяет при $(x,t)\in\overline{q}$

классическое решение задачи (8.1) – (8.2).

Доказательство.

Докажем существование и ограниченность функции $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$. Сделаем замену переменных $z=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, $\xi=2a\sqrt{t}z+x$. В результате получим:

$$|u(x,t)|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi\left(x+2za\sqrt{t}\right)\right|e^{-z^2}dz\le\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=M.$$

Следовательно, функция $u(x,t)$ существует и ограничена.

Чтобы доказать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности, используем так называемый обобщенный принцип суперпозиции:

если функция $u(x,t,k)$ по переменным $x,t$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению $L[u]=0$ при любом $k$, то и функция $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,t,k)\cdot dk$ удовлетворяет этому уравнению: $L[u]=0$, если все производные по $x$ и $t$ можно вычислять под знаком интеграла.

Из обобщенного принципа суперпозиции непосредственно следует, что функция $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности.

Для применимости обобщенного принципа суперпозиции достаточно доказать, что интеграл, полученный формальным дифференцированием функции $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ по $x$ и $t$, сходится равномерно. Докажем равномерную сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_t(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ в окрестности любой внутренней точки $(x,t)\in q$. (9.1)

Так как $\dfrac{\partial G}{\partial t}=-\dfrac{1}{2t}G(x,\xi,t)+\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}G(x,\xi,t)$, то нужно доказать равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\left\{-\frac{1}{2}+\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\frac{\varphi(\xi)}{t}d\xi \tag{9.2}$$

в окрестности внутренней точки $(x,t)\in\overline{q}_\varepsilon=R^1\times[\varepsilon,T]$ для любых $\varepsilon>0$ и $T>\varepsilon$. Сделаем замену переменной $z=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, тогда получим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\left(x,x+2a\sqrt{t}z,t\right)\left\{-\frac{1}{2}+z^2\right\}\frac{2a\sqrt{t}\varphi\left(2a\sqrt{t}z+x\right)}{t}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}+z^2\right)\frac{\varphi\left(2a\sqrt{t}z+x\right)}{t}e^{-z^2}dz.$$

Проведём мажорантную оценку этого интеграла в области $\overline{q}_\varepsilon$:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}+z^2\right)\frac{\varphi\left(2a\sqrt{t}z+x\right)}{t}e^{-z^2}dz\right|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|z^2-\frac{1}{2}\right|\frac{M}{t}e^{-z^2}dz<$$

$$<\frac{M}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(z^2+\frac{1}{2}\right)e^{-z^2}dz.$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(z^2+\frac{1}{2}\right)e^{-z^2}dz$ сходится, следовательно, интеграл (9.2) равномерно сходится в окрестности внутренней точки области $\overline{q}_\varepsilon$. Аналогично доказывается равномерная сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{xx}(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$. (Выразите для этого $G_{xx}$ через $G_t$.)

В силу обобщенного принципа суперпозиции функция $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности в области $\overline{q}_\varepsilon$, а в силу произвольности выбора $\varepsilon$ и $T$ однородное уравнение теплопроводности будет выполняться в области $q$.

Осталось доказать, что функция $u(x,t)$ непрерывно примыкает к функции $\varphi(x)$. Сделаем замену $z=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, получим $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}\varphi\left(x+2az\sqrt{t}\right)dz$.

Так как подынтегральная функция мажорируется функцией $Me^{-z^2}$, интеграл от которой сходится, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\varphi\left(x+2az\sqrt{t}\right)dz$ сходится равномерно по параметру $t$ при $0\le t\le T$. В силу непрерывности подынтегральной функции можно осуществить предельный переход под знаком интеграла, т.е. $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz=\varphi(x)$. Следовательно, функция $u(x,t)$ непрерывна в области $\overline{q}$ и непрерывно примыкает к функции $\varphi(x)$. Теорема доказана.

## § 10. Метод функции Грина.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения $u_t=a^2u_{xx}$, $(x,t)\in q_l$, с однородными граничными условиями $u(0,t)=u(l,t)=0$, $t>0$, и начальным условием $u(x,0)=\varphi(x)$, $x\in(0,l)$. Решение этой задачи строится методом разделения переменных и представимо в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad (10.1)$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi,\quad n=1,2,.... \qquad (10.2).$$

Преобразуем полученное решение, подставляя (10.2) в (10.1) и меняя порядок интегрирования:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi\right]e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$= \int_0^l \left[ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x \cdot \sin\frac{\pi n}{l}\xi \right] \varphi(\xi) d\xi .$$

Введём обозначение

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x \cdot \sin\frac{\pi n}{l}\xi , \qquad (10.3)$$

тогда решение получим в виде

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t) \cdot \varphi(\xi) d\xi \qquad (10.4).$$

**Определение.** Функция $G(x,\xi,t)$, определяемая формулой (10.3), называется функцией Грина для первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

Рассмотрим краевую задачу для ограниченного стержня с источником тепла, т.е. будем искать решение неоднородного уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $(x,t) \in q_l$, с нулевыми граничными условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t > 0$, и нулевым начальным условием $u(x,0) = 0$, $x \in (0,l)$.

С помощью функции Грина решение этой задачи представимо в виде

$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi\, d\tau$, где функция $G(x,\xi,t-\tau)$ определяется по формуле (10.3).

**Замечание 1.** Если уравнение и начальное условие неоднородные, то решение задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x, t) \in q_l ,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0, l)$$
$$u(0,t) = 0 , \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0$$

можно представить в виде суммы $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$, где функция $u_1(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$u_{1t}=a^2u_{1xx}\,,\quad (x,t)\in q_l\,,$$
$$u_1(x,0)=\varphi(x)\,,\quad x\in(0,l)$$
$$u_1(0,t)=0\,,\quad u_1(l,t)=0,\quad t>0\,,$$

а функция $u_2(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$u_{2t}=a^2u_{2xx}+f(x,t)\,,\quad (x,t)\in q_l\,,$$
$$u_2(x,0)=0\,,\quad x\in(0,l)$$
$$u_2(0,t)=0\,,\quad u_2(l,t)=0,\quad t>0.$$

**Замечание 2.** Если кроме неоднородности в уравнении и начальном условии ещё и граничные условия неоднородные, т.е.

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad (x,t)\in q_l\,,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,l)$$
$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t),\quad t>0\,,$$

то решение задачи будем искать в виде $u(x,t)=v(x,t)+U(x,t)$. Потребуем, чтобы функция $U(x,t)$ удовлетворяла условиям $U(0,t)=\mu_1(t),\ \ U(l,t)=\mu_2(t)$. Эти условия определяют функцию $U(x,t)$ неоднозначно. В качестве этой функции возьмём функцию, линейную по $x$, т.е.

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x-l}{l}\big(\mu_1(t)-\mu_2(t)\big).$$

Теперь перепишем краевую задачу для функции $v(x,t)$:

$$v_t=a^2v_{xx}+F(x,t),$$
$$F(x,t)=f(x,t)-U_t\,,\quad (x,t)\in q_l\,,$$
$$v(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x)-U(x,0),\quad x\in(0,l)$$

$$v(0,t)=0\,,\quad v(l,t)=0,\quad t>0\,.$$

Получили задачу, которая рассматривалась в замечании 1.

## § 11. Единственность решения второй начально-краевой задачи на отрезке и в ограниченной области пространства.

Единственность решения начально-краевой задачи с граничным условием II рода мы докажем при помощи некоторых тождеств для решения однородного уравнения теплопроводности. Для получения этих тождеств введём дополнительные упрощающие предположения: будем считать, что рассматриваемое решение $u(M,t)$ имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и непрерывные вторые производные по координатам точки $M$ при $0<t\le T$, $M\in\overline{\Omega}$. Кроме того, будем предполагать, что это решение непрерывно в $\overline{Q}_T$ (т.е. при $0\le t\le T$ в $\overline{\Omega}$) и удовлетворяет уравнению $u_t=a^2\Delta u$ при $0<t\le T$, $M\in\overline{\Omega}$ (вплоть до границы $S$ области $\Omega$).

Сначала рассмотрим случай одной пространственной переменной. Пусть $u(x,t)\in C^{2,1}(\{0\le x\le l\}\times\{0<t\le T\})\cap C(\overline{q}_{l,T})$ и $u_t=a^2u_{xx}$ при $0\le x\le l$, $0<t\le T$. Введём зависящий от параметра $t$ квадратичный функционал $J[u](t)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l u^2(x,t)dx$.

Вычислим производную от этого функционала по переменной $t$ на решении уравнения $u_t=a^2u_{xx}$ при

$t > 0$:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^l u\frac{\partial u}{\partial t}dx = a^2\int_0^l u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = \left(a^2 u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} - a^2\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Это и есть нужное нам тождество:

$$\int_0^l u\frac{\partial u}{\partial t}dx = \left(a^2 u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} - a^2\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (11.1)$$

Кроме того, как функция от $t$ функционал $J[u](t)$ непрерывен при $0 \le t \le T$ на рассматриваемом решении однородного уравнения теплопроводности.

В случае трёх пространственных переменных будем считать, что область их изменения $\Omega$ ограничена. Пусть $u(M,t) \in C^{2,1}\left(\overline{\Omega} \times \{0 < t \le T\}\right) \cap C\left(\overline{Q}_T\right)$ и $u_t = a^2\Delta u$ при $M \in \overline{\Omega}$, $0 < t \le T$. По аналогии со случаем одной пространственной переменной введём однопараметрический функционал $J[u](t) = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\overline{\Omega}} u^2 d\tau$, где $d\tau$ – элемент объёма. При $t > 0$ вычислим производную $\frac{dJ}{dt}$, предполагая, что $u(M,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2\Delta u$ при $M \in \overline{\Omega}$, $0 < t \le T$.

$$\frac{dJ}{dt} = \iiint\limits_{\overline{\Omega}} u\frac{\partial u}{\partial t}d\tau = a^2\iiint\limits_{\overline{\Omega}} u\Delta u\, d\tau = a^2\iiint\limits_{\overline{\Omega}} u\,div\,grad\,u\, d\tau.$$

Далее воспользуемся тождеством

$div(u\,grad\,u) = u\,div(grad\,u) + (grad\,u)^2$:

$$\iiint\limits_{\overline{\Omega}} u\frac{\partial u}{\partial t}d\tau = a^2\iiint\limits_{\overline{\Omega}} div(u\,grad\,u)d\tau - a^2\iiint\limits_{\overline{\Omega}} (grad\,u)^2 d\tau.$$

Теперь воспользуемся формулой Гаусса – Остроградского $\iiint\limits_{\Omega} div(u\,grad\,u)d\tau = \iint\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$, где поверхность $S$ ограничивает область $\Omega$, а $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к $S$. В результате получим тождество:

$$\iiint\limits_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}d\tau = a^2\iint\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma - a^2\iiint\limits_{\Omega}(grad\,u)^2 d\tau. \qquad (11.2)$$

Теперь перейдём к изучению единственности решения второй начально-краевой задачи. Рассмотрим случай одной пространственной переменной:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 \le x \le l, \quad 0 < t \le T;$$
$$u_x(0,t) = \nu_1(t), \quad u_x(l,t) = \nu_2(t), \quad 0 \le t \le T;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l.$$

Докажем единственность решения этой задачи. Предположим, что существуют два её решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда функция $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad 0 \le x \le l, \quad 0 < t \le T;$$
$$v_x(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T;$$
$$v(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l.$$

Пусть для классического решения этой задачи выполнены предположения, сформулированные в начале данного параграфа. Тогда можно использовать тождество (11.1). Введём $J[v](t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l v^2(x,t)dx$ и учтём, что из краевых условий следует $\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}^{x=l} = 0$. Из тождества

(11.1) получаем $\dfrac{dJ}{dt}=-a^2\int\limits_0^l\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\le 0$ при $t>0$. При $t=0$ имеем из начального условия $v(x,0)=0$, откуда $J[v](0)=0$. Как функция от $t$ функционал $J$ непрерывен при $0\le t\le T$, неотрицателен, монотонно не возрастает, $J(t=0)=0$. Поэтому $J[v](t)\equiv 0$. Следовательно, $v(x,t)\equiv 0$, и вторая начально-краевая задача может иметь лишь единственное решение.

В случае трёх пространственных переменных имеем задачу в ограниченной области $\Omega$ с гладкой границей $S$:

$$u_t=a^2\Delta u+f(M,t),\quad M\in\overline{\Omega},\quad 0<t\le T;$$
$$\left.\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}\right|_{P\in S}=\nu(P),\quad 0\le t\le T;$$
$$u(M,0)=\varphi(M),\quad M\in\overline{\Omega}.$$

Докажем единственность решения этой задачи. Предположим, что существуют два её решения $u_1(M,t)$ и $u_2(M,t)$. Тогда функция $v(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$ удовлетворяет задаче

$$v_t=a^2\Delta v,\quad M\in\overline{\Omega},\quad 0<t\le T;$$
$$\left.\frac{\partial v(P,t)}{\partial n}\right|_{P\in S}=0,\quad 0\le t\le T;$$
$$v(M,0)=0,\quad M\in\overline{\Omega}.$$

Пусть для классического решения этой задачи выполнены предположения, сформулированные в начале данного параграфа. Тогда можно использовать тождество (11.2). Введём $J[v](t)=\dfrac{1}{2}\iiint\limits_{\overline{\Omega}}v^2(M,t)d\tau$ и учтём, что из краевого условия следует $\iint\limits_S v\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma = 0$. Из тождества (11.2) получаем $\frac{dJ}{dt} = -a^2\iiint\limits_{\bar{\Omega}}(grad\, v)^2 d\tau$. Следовательно, $\frac{dJ}{dt} \le 0$ для любого $t > 0$. При $t = 0$ имеем $v(M,0) = 0$, т.е. $J[v](0) = 0$. Так как функционал $J$ неотрицателен, по переменной $t$ монотонно не возрастает и равен нулю при $t = 0$, то $J[v](t) \equiv 0$. Следовательно, $v(M,t) \equiv 0$, и вторая начально-краевая задача может иметь лишь единственное решение.

# Глава. 2. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.

## § 1. Уравнения Лапласа и Пуассона.

Пусть температура $u(M)$ в области $\Omega$ в пространстве зависит от точки $M$ и не зависит от времени $t$, т.е. тепловое поле в $\Omega$ стационарно. В предыдущей главе было показано, что температура $u(M,t)$ нестационарного теплового поля удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t = a^2\Delta u + f(M,t)$, причем, если тепловые источники отсутствуют, то $f(M,t) = 0$. Если процесс стационарен и источники тепла отсутствуют, то устанавливается распределение температуры $u(M)$, не меняющееся с течением времени, $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ и, следовательно, удовлетворяющее уравнению $\Delta u = 0$, которое называется уравнением Лапласа. При наличии источников тепла получаем уравнение $\Delta u = -f(M)/a^2$, которое называется уравнением Пуассона. Постоянную $a^2$ далее будем включать в функцию $f$. Уравнения Лапласа и Пуассона относятся к уравнениям эллиптического типа.

Рассмотрим область пространства $\Omega$, ограниченную замкнутой поверхностью $S$. Задача о стационарном распределении температуры $u(M)$ внутри области $\Omega$ формулируется следующим образом: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta u = -f(M)$ в $\Omega$ и граничному условию одного из следующих типов:

I. $u(P) = \mu(P), \quad P \in S$, (первая краевая задача)

II. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S} = \nu(P)$, (вторая краевая задача)

где $\mu$, $\nu$ – заданные функции, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная функции $u(M)$ по внешней нормали к поверхности $S$. Первую краевую задачу называют задачей Дирихле, а вторую – задачей Неймана.

Если ищется решение задачи в области $\Omega$, внутренней (внешней) к поверхности $S$, то задачу называют внутренней (внешней) краевой задачей. Имеются различия в математических постановках внутренних и внешних краевых задач.

В декартовой системе координат уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta_{(x,y,z)} u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

в сферической ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$)

$$\Delta_{(r,\theta,\varphi)}u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

в цилиндрической $(x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z)$ –

$$\Delta_{(r,\varphi,z)}u(r,\varphi,z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Аналогично ставятся задачи в плоской области $D$, границей которой является кривая $\gamma$. Такие задачи описывают стационарное распределение температуры $u(M)$ в пластине $D$. В плоском случае уравнение Лапласа имеет вид $\Delta_{(x,y)}u(x,y)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в декартовой системе координат, или $\Delta_{(r,\varphi)}u(r,\varphi)=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$ – в полярной $(x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi)$.

## § 2. Гармонические функции. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.

**Определение.** Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(M)$, которая в заданной области удовлетворяет уравнению Лапласа, называется гармонической в этой области функцией.

**Примеры.** $u(x,y,z)=Ax+By+Cz+D$, $u(x,y,z)=\sin 3x\cdot\sin 4y\cdot sh5z$ – гармонические всюду в пространстве $Oxyz$ функции. $u(x,y)=x^2-y^2$,

$u(x,y)=\cos x\cdot shy - shx\cdot\sin y$ гармоничны всюду на плоскости $Oxy$.

Приведём важные примеры функций, гармонических всюду, кроме одной лишь точки. Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – некоторая фиксированная точка в пространстве. Найдём решение уравнения Лапласа, зависящее только от $R_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Введём сферическую систему координат $(r,\theta,\varphi)$ с центром в точке $M_0(r_0,\theta_0,\varphi_0)$. Такое решение будет обладать сферической симметрией, т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=0$. Следовательно, будет выполняться уравнение $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{du}{dr}\right)=0$. Общее решение этого уравнения имеет вид $u(r)=\dfrac{C_1}{r}+C_2$, где $r=R_{MM_0}$. Решение $u(M,M_0)=\dfrac{1}{R_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве. Это гармоническая функция переменной $M$, определённая всюду в пространстве, кроме точки $M=M_0$.

В двумерном случае введём полярную систему координат $(r,\varphi)$ с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$. Найдём решение уравнения Лапласа, зависящее только от $R_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. В этом случае $\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=0$, и будет выполняться уравнение $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{du}{dr}\right)=0$. Его общее решение имеет вид $u(r) = C_1 \ln\frac{1}{r} + C_2$, где $r = R_{MM_0}$.

Функция $u(M, M_0) = \ln\frac{1}{R_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости.

**Фундаментальным** решением уравнения Лапласа называют такую гармоническую функцию, которая имеет определённого вида особенность в единственной точке $M_0$. Поведение на бесконечности фундаментальных решений уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости различно; именно поэтому внешние краевые задачи в трёхмерном и в двумерном случаях надо ставить по-разному.

## § 3. Математическая постановка краевых задач.

**Внутренняя задача Дирихле.**

Пусть $S$ – замкнутая, достаточно гладкая поверхность, ограничивающая область $\Omega$. Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$, удовлетворяет внутри области $\Omega$ уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и принимает на границе $S$ заданные значения: $u(P) = \mu(P)$, $P \in S$. Таким образом, мы ищем функцию $u(M)$, гармоничную внутри $\Omega$. Требование гармоничности функции $u(M)$ на границе излишне. Условие непрерывности функции $u(M)$ в замкнутой области необходимо для единственности решения задачи. Поэтому требуем $\mu \in C(S)$. В этом случае функция $u(M)$ называется классическим решением задачи. $u(M) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\mu \in C(S)$.

**Внутренняя задача Неймана.**

Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega}$, имеет непрерывные вторые производные в $\Omega$ и удовлетворяет внутри области $\Omega$ уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, её нормальная производная принимает на границе заданные значения $\left.\dfrac{\partial u(P)}{\partial n}\right|_{P \in S} = \nu(P)$, $P \in S$. $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\nu \in C(S)$.

Внешние краевые задачи для трех и двух независимых переменных ставятся по-разному.

Рассмотрим сначала случай трех переменных. Пусть $\Omega'$ – область, внешняя к некоторой замкнутой поверхности $S$.

**Внешняя задача Дирихле.**

Требуется найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной пространственной области $\Omega'$, непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}' = \Omega' \cup S$, принимающую на границе заданные значения $u(M) = \mu(M)$, $M \in S$, и равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности. Стремление к нулю функции $u(M)$ на бесконечности необходимо для единственности решения задачи. $u(M) \in C(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$.

Если рассматривать случай двух переменных, то стремление к нулю функции на бесконечности нужно заменить на условие ограниченности функции на бесконечности.

Внешние краевые задачи Неймана ставятся аналогично, но с краевым условием II типа. $u(M)\in C^1(\overline{\Omega}')\cap C^2(\Omega')$.

**Замечание.** В настоящем курсе мы рассматриваем только **классические** решения, хотя многие практические задачи приводят к необходимости обобщения этого понятия на случай, когда функция $u(M)$ и краевые условия не удовлетворяют сформулированным выше требованиям.

## § 4. Первая и вторая формулы Грина. Интегральное представление функции в ограниченной области (третья формула Грина).

Пусть в области $\Omega$, ограниченной замкнутой поверхностью $S$, заданы две функции $u(M)$ и $v(M)$: $u,v\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$. Функции $u,v$ – произвольные, не обязательно гармонические. Тогда в области $\Omega$ справедлива первая формула Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u\,d\tau=\iint\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma-\iiint\limits_{\Omega}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau\,. \qquad (4.1)$$

Доказательство. Вспомним теорему Остроградского – Гаусса: Если $\vec{A}$ – векторное поле, то $\iiint\limits_{\Omega} div\,\vec{A}\,d\tau=\iint\limits_{S} A_n d\sigma$, где $A_n$ – величина проекции вектора $\vec{A}$ на нормаль $\vec{n}$ к границе $S$. В качестве

векторного поля $\vec{A}$ можно взять $\vec{A} = v(M) \cdot grad\, u(M)$.
$div(v \cdot grad\, u) = v \cdot div(grad\, u) + (grad\, v \cdot grad\, u) =$
$= v \cdot \Delta u + (grad\, v \cdot grad\, u)$, $\Delta u = div(grad\, u)$. Отсюда $v \cdot \Delta u = div(v \cdot grad\, u) - (grad\, v \cdot grad\, u)$. Теперь, проинтегрировав по объёму $\Omega$, получим формулу (4. 1).

Если поменять местами функции $u(M)$ и $v(M)$, то

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v \, d\tau = \iint_{S} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\Omega} (grad\, u \cdot grad\, v) d\tau . \qquad (4.2)$$

Вычтем из формулы (4.1) формулу (4.2), тогда получим вторую формулу Грина:

$$\iiint_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\tau = \iint_{S} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma . \qquad (4.3)$$

Вторая формула Грина симметрична относительно функций $u(M)$ и $v(M)$.

Теперь, используя вторую формулу Грина и фундаментальное решение уравнения Лапласа, получим третью формулу Грина – интегральное представление функции $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ в ограниченной области $\Omega$. Пусть $u(M)$ – произвольная функция указанного класса в области $\Omega$, а $v(M, M_0) = \dfrac{1}{R_{MM_0}}$, где $M_0 \in \Omega$. $v(M, M_0)$ имеет особенность, когда точка $M$ совпадает с точкой $M_0$. Поэтому к функциям $u(M)$ и $v(M, M_0)$ в области $\Omega$ применить вторую формулу Грина нельзя. Окружим точку $M_0$ шаром $K_{\varepsilon}^{M_0}$ радиуса $\varepsilon$, ограниченным сферой $\Sigma_{\varepsilon}^{M_0}$. Применим к функциям

$u(M)$ и $v(M, M_0)$ вторую формулу Грина в области $\Omega \setminus K_\varepsilon^{M_0}$:

$$\iiint\limits_{\Omega \setminus K_\varepsilon^{M_0}} (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau = \iint\limits_{S} \left( u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left( u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma . \qquad (4.4)$$

В интеграле $\iint\limits_{S} \left( u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$ $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности $S$, а в интеграле $\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left( u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$ $\vec{n}$ – внутренняя нормаль к поверхности сферы $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$. Учитывая, что $v(P)\Big|_{P \in \Sigma_\varepsilon^{M_0}} = \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{\partial v(P)}{\partial n}\Bigg|_{P \in \Sigma_\varepsilon^{M_0}} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$, вычислим интеграл по сфере:

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left( u(P)\frac{\partial v(P, M_0)}{\partial n_P} - v(P, M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \right) d\sigma_P =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left( u(P)\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P)}{\partial n} \right) d\sigma_P = *.$$

Воспользуемся теоремой о среднем:

$$* = \left( \frac{1}{\varepsilon^2} u(P^*) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n} \right) 4\pi\varepsilon^2 =$$

$$= 4\pi\, u(P^*) - 4\pi\varepsilon \frac{\partial u(P^{**})}{\partial n} = **,$$

где точки $P^*$ и $P^{**}$ принадлежат сфере $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$. Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, тогда сфера $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$ и шар $K_\varepsilon^{M_0}$ будут стремиться к точке $M_0$, значения $u(P^*)$ и $\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n}$ будут стремиться к $u(M_0)$ и $\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}$; в силу ограниченности $\frac{\partial u}{\partial n}$ и непрерывности функции $u$ получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(**)= 4\pi u(M_0)$. Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ формула (4.4) примет вид

$$-\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{R_{MM_0}}\Delta u\, d\tau_M = 4\pi u(M_0)+$$

$$+\iint\limits_{S}\left(u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)-\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P$$

или

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}d\tau_M, \qquad (4.5)$$

где $M_0 \in \Omega$. Формула (4.5) называется третьей формулой Грина или интегральным представлением функции $u(M)$.

**Замечание.**

Если точка $M_0 \in R^3 \setminus \overline{\Omega}$, то точки $M$ и $M_0$ не могут совпасть. Тогда правая часть формулы (4.5) равна нулю. Если точка $M_0$ принадлежит гладкой границе области $\overline{\Omega}$, то вырезать эту точку можно сферическим куполом, в пределе это будет полусфера, а её поверхность будет равна $2\pi\varepsilon^2$. Тогда формулу (4.5) можно переписать так:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}d\tau_M=\begin{cases}u(M_0), & M_0\in\Omega,\\ 0, & M_0\in R^3\setminus\overline{\Omega},\\ \dfrac{u(M_0)}{2}, & M_0\in S.\end{cases}$$

## § 5. Свойства гармонических функций. Формула среднего значения. Принцип максимума гармонической функции.

1. Если функция $u(M)\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ и является гармонической в области $\Omega$, ограниченной замкнутой поверхностью $S$, то $\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0$.

Доказательство. Положим в первой формуле Грина $v(M)\equiv 1$, тогда получим

$\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\iiint_\Omega\Delta u\,d\tau+\iiint_\Omega(grad\,v\cdot grad\,u)d\tau=0$, так как $\Delta u=0$ и $grad\,v=0$.

Из доказанного свойства вытекает необходимое условие существования решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа:

решение задачи $\Delta u=0$, $M\in\Omega$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S}=\nu(P)$

может существовать только если $\iint\limits_S \nu(P)d\sigma = 0$. Условие разрешимости аналогичной задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(M), \quad M \in \Omega,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S} = \nu(P)$$

выглядит так: $\iiint\limits_\Omega f(M)d\tau + \iint\limits_S \nu(P)d\sigma = 0$. Это условие вытекает из первой формулы Грина, если положить $v(M) \equiv 1$.

2. Формула среднего значения.

Если $u(M)$ – гармоническая функция в области $\Omega$, то для любой точки $M \in \Omega$ имеет место представление $u(M) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a^M} u(P)d\sigma_P$, где $\Sigma_a^M$ – сфера радиуса $a$ с центром в точке $M$, целиком лежащая в $\Omega$, т.е. $\Sigma_a^M \subset \Omega$.

Доказательство.

Применим третью формулу Грина к шару $K_a^M$ с поверхностью $\Sigma_a^M$:

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma_a^M} \left( u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{PM}}\right) - \frac{1}{R_{PM}}\frac{\partial u(P)}{\partial n} \right) d\sigma_P$$. Так как $\left.\frac{1}{R_{PM}}\right|_{P\in\Sigma_a^M} = \frac{1}{a}$, $\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{PM}}\right)\right|_{P\in\Sigma_a^M} = -\frac{1}{a^2}$, то, учитывая $\iint\limits_{\Sigma_a^M} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$, получим $u(M) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a^M} u(P)d\sigma_P$.

3. Существование всех производных у гармонической функции.

Доказательство этого свойства следует из третьей формулы Грина. При $M_0 \in \Omega$ поверхностные интегралы являются собственными и их можно дифференцировать по координатам точки $M_0$ любое число раз.

**Замечание.**

Гармоническая функция во всех внутренних точках $\Omega$ аналитична, т.е. в окрестности любой точки $M_0 \in \Omega$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся степенной ряд. При этом радиус сходимости ряда не меньше, чем расстояние до границы $S$.

4. Принцип максимума гармонической функции.

Рассмотрим область $\Omega$, ограниченную поверхностью $S$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$.

**Теорема.**

Пусть функция $u(M)$ гармонична в $\Omega$ и непрерывна в $\overline{\Omega}$. Тогда она достигает своего максимального и минимального значения на границе области $\overline{\Omega}$, т.е. $\max\limits_{M \in \overline{\Omega}} u(M) = \max\limits_{M \in S} u(M)$, $\min\limits_{M \in \overline{\Omega}} u(M) = \min\limits_{M \in S} u(M)$.

Доказательство.

По теореме Вейерштрасса функция $u(M)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $\overline{\Omega}$, достигает своего максимального значения. Обозначим $A = \max\limits_{M \in \overline{\Omega}} u(M)$. Предположим, что это значение достигается в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, т.е. внутри области $\Omega$. Рассмотрим сферу $\Sigma_a^{M_0}$ радиуса $a$ с центром в точке $M_0$, целиком лежащую в области $\Omega$. Для этой сферы напишем формулу среднего значения:

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}}u(P)d\sigma_P\le$$

$$\le\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}}u(M_0)d\sigma_P=u(M_0). \qquad (5.1)$$

Таким образом, возможно только равенство. Это значит, что в каждой точке сферы $\Sigma_a^{M_0}$ значение функции $u(M)$ равно $A$, т.е. $u(M)\big|_{M\in\Sigma_a^{M_0}}=A$; в противном случае равенство в формуле (5.1) не будет выполняться.

Теперь рассмотрим сферу $\Sigma_{a_1}^{M_1}$ с центром в точке $M_1\in\Sigma_a^{M_0}$ радиуса $a_1$, целиком лежащую в области $\Omega$. Аналогично предыдущему покажем, что $u(M)\big|_{M\in\Sigma_a^{M_1}}=u(M_1)=u(M_0)=A$. Можно построить такую последовательность сфер $\Sigma_{a_n}^{M_n}$ с центрами в точках $M_n\in\Omega$ радиусов $a_n$, целиком лежащих в $\Omega$, что последовательность точек $\{M_n\}$ будет сходиться к точке $\overline{M}\in S$. В силу нашего построения $u(M_n)=u(M_0)=A$ для любого $n$. Так как функция $u(M)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$, то последовательность $\{u(M_n)\}$ будет сходиться к $u(\overline{M})$, откуда следует, что $u(\overline{M})=A$. Теорема доказана.

**Замечание 1.**

Аналогично доказывается теорема о минимальном значении гармонической функции: вместо функции $u(M)$ надо рассмотреть функцию $v(M)=-u(M)$.

**Замечание 2.**

Фактически доказано более сильное утверждение: функция $u(M)$, гармоническая в $\Omega$ и непрерывная в

$\overline{\Omega}$, принимающая максимальное значение в $\Omega$, является константой в $\overline{\Omega}$. Т.е. из всех гармонических функций только постоянная функция может достигать экстремального значения внутри области $\Omega$.

**Замечание 3.**

Для функций двух переменных все указанные свойства сохраняются, только теорема о среднем значении запишется так: $u(M_0)=\dfrac{1}{2\pi a}\int\limits_{L_a^{M_0}}u(P)dl_P$, где $L_a^{M_0}$ – окружность радиуса $a$ с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$.

**Следствие.**

Если две гармонические функции $u(M)$ и $v(M)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, и $u(M)\big|_{M\in S}\le v(M)\big|_{M\in S}$, то всюду в $\Omega$ $u(M)\le v(M)$.

Доказательство.

Надо рассмотреть гармоническую функцию $w(M)=v(M)-u(M)$, которая будет непрерывной в $\overline{\Omega}$, $w(M)\big|_{M\in S}\ge 0$. В силу принципа минимального значения $w(M)\ge 0$ всюду в $\Omega$.

## § 6. Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле.

**Замечание.** Если в определении классического решения внутренней задачи Дирихле отбросить условие непрерывности функции $u(M)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$, то нарушится единственность решения задачи, так как любая функция вида $u(M)=\begin{cases} const, & M\in\Omega, \\ \mu(M), & M\in S \end{cases}$ будет решением задачи.

**Теорема единственности решения задачи Дирихле.** Внутренняя задача Дирихле не может иметь более одного классического решения.

Доказательство. Допустим, что существуют два решения задачи Дирихле $u_1(M)$ и $u_2(M)$. Введём функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. $v(M)$ будет удовлетворять условиям

$$v\in C(\overline{\Omega});\quad \Delta v(M)=0,\quad M\in\Omega;\quad v(P)\big|_{P\in S}=0\,.$$

Функция $v(M)$ является решением задачи Дирихле с однородными граничными условиями. По теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция в замкнутой ограниченной области достигает своего максимального и минимального значений. Если $v(M)>0$ хотя бы в одной точке области $\Omega$, то она достигает своего максимального значения именно внутри области $\Omega$, но это невозможно в силу принципа максимума. Аналогично доказывается, что $v(M)$ не может быть меньше нуля внутри $\Omega$. Следовательно, $v(M)\equiv 0$. Теорема доказана.

**Замечание.** Доказанная теорема единственности решения внутренней задачи Дирихле справедлива и в случае уравнения Пуассона $\Delta u=-f$: если имеются два решения краевой задачи, то их разность удовлетворяет уравнению Лапласа и нулевому краевому условию Дирихле.

Перейдем к определению устойчивости решения задачи Дирихле.

**Определение.** Задача называется устойчивой, если малым изменениям входной информации соответствует малое изменение решения.

Рассмотрим две задачи Дирихле:

$$\Delta u_i(M)=0,\ \ M\in\Omega,$$

$$u_i(P)\big|_{P\in S}=\mu_i(P),\ \ i=1,2.$$

Введём расстояния между функциями:

$$\rho(\mu_1,\mu_2)=\|\mu_1-\mu_2\|_{C(S)}=\max_{P\in S}|\mu_1(P)-\mu_2(P)|,$$

$$\rho(u_1,u_2)=\|u_1-u_2\|_{C(\overline{\Omega})}=\max_{M\in\overline{\Omega}}|u_1(M)-u_2(M)|.$$

Используя $\rho(\mu_1,\mu_2)$ и $\rho(u_1,u_2)$, определим понятие устойчивости для задачи Дирихле.

**Определение.** Решение задачи Дирихле называется устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из неравенства $\rho(\mu_1,\mu_2)<\delta(\varepsilon)$ следует $\rho(u_1,u_2)<\varepsilon$.

**Теорема.** Для задачи Дирихле, если $\rho(\mu_1,\mu_2)\le\varepsilon$, то $\rho(u_1,u_2)\le\varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что функция $u(M)\equiv\varepsilon$ гармоническая и всюду положительна. Рассмотрим функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. Из принципа максимума следует, что если на границе области $|v|_{P\in S}\le\varepsilon$, то $|v(M)|\le\varepsilon$ всюду в $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

**Замечание.** Если функция $\mu(P)$, $P\in S$, имеет разрывы I рода, то в постановке задачи Дирихле надо отказаться от условия непрерывности искомой функции в замкнутой области. Т.е. если $\mu$ – кусочно-непрерывная функция, то задача Дирихле будет ставиться так:

найти функцию $u(M)$, гармоническую внутри $\Omega$, $u(P)\big|_{P\in S}=\mu(P)$, где $P$ - точки непрерывности функции $\mu$, и $|u|\le A$, $A=const$.

Для такой обобщенной постановки задачи остаётся справедливой теорема единственности.

## § 7. Внутренняя задача Неймана.

Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана:

$$\Delta u(M)=0,\quad M\in\Omega, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}=\nu(P),\quad P\in S. \tag{7.2}$$

**Замечание 1.** Если нормаль $\vec{n}$ к поверхности $S$ составляет угол $\alpha$ с осью $OX$, угол $\beta$ с осью $OY$ и угол $\gamma$ с осью $OZ$, то $\dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

**Замечание 2.** Решение задачи Неймана отличается от решения задачи Дирихле тем, что оно определяется с точностью до константы. Если $u(M)$ – решение задачи Неймана, то $v(M)=u(M)+C$, где $C=const$, – тоже решение той же задачи Неймана. Это легко проверить, если подставить функцию $v(M)$ в задачу (7.1) – (7.2).

**Теорема.**

Решение задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной, т.е. если $u_1(M)$ и $u_2(M)$ – решения одной и той же задачи Неймана, то $u_1(M)-u_2(M)=const$.

Доказательство.

Здесь нельзя воспользоваться принципом максимума, так как неизвестно, чему равны значения функции $u(M)$ на границе. Поэтому используем формулы Грина. Допустим, что существуют две функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, являющиеся решениями задачи Неймана (7.1), (7.2). Рассмотрим функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. $v(M)\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$. Функция $v(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0, \quad M\in\Omega,$$

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n}=0, \quad P\in S.$$

Очевидно, решением этой задачи является $v(M)=const$. Докажем, что других решений нет. Применим первую формулу Грина к функции $v(M)$:

$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta v d\tau = \iint\limits_{S} v\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma - \iiint\limits_{\Omega}(grad\, v\cdot grad\, v)d\tau .$$

Учитывая, что $\Delta v(M)=0$, $M\in\Omega$, и $\left.\frac{\partial v(P)}{\partial n}\right|_{P\in S}=0$, получим $\iiint\limits_{\Omega}(grad\, v\cdot grad\, v)d\tau=0$, т.е.

$$(grad\, v\cdot grad\, v)=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2=0.$$

Так как сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, то $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}=0$ всюду в области $\Omega$. Отсюда получаем $v(M)=const$. Теорема доказана.

**Замечание 3.** Необходимым условием разрешимости задачи Неймана является $\iint\limits_S \nu(P)d\sigma = 0$. Это следует из свойства гармонической функции: $\iint\limits_S \frac{\partial u(P)}{\partial n} d\sigma = 0$.

**Замечание 4.** Совершенно аналогичными свойствами обладает внутренняя задача Неймана в ограниченной области $D$ на плоскости.

**Задача.** Разрешима ли задача для функции $u(r,\varphi)$:

$\Delta u = 0$, $0 \le r < a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$,

$r$, $\varphi$ – полярные координаты на плоскости; $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ ?

## § 8. Внешние краевые задачи в пространстве.

### п. 1. Внешняя задача Дирихле.

Рассмотрим область $\Omega$, ограниченную замкнутой поверхностью $S$ в пространстве $R^3$. Тогда область $\Omega' = R^3 \setminus \overline{\Omega}$ будет внешней к области $\Omega$ в $R^3$, $\overline{\Omega}' = \Omega' \cup S$. Поставим внешнюю задачу Дирихле:

найти функцию $u(M)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}'$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в открытой области $\Omega'$, принимающую на границе области $\overline{\Omega}'$ заданные значения $u(P)|_{P\in S} = \mu(P)$, а на бесконечности равномерно стремящуюся к нулю. $u(M) \in C^2(\Omega') \cap C(\overline{\Omega}')$.

**Замечание.** Условие равномерного стремления к нулю функции $u(M)$ на бесконечности важно для единственности решения задачи.

**Пример.** Рассмотрим задачу $\Delta u(r)=0$, $r>a$, $u(r=a)=1$. Функция $u(r)$ вне шара радиуса $a$ удовлетворяет уравнению Лапласа, а на границе принимает заданное значение $u(r=a)=1$. Тогда функции $u_1(r)\equiv 1$ и $u_2(r)=\frac{a}{r}$ удовлетворяют и уравнению Лапласа вне шара и граничному условию. Получили два решения поставленной задачи. Если учесть условие на бесконечности, то функция $u_1(r)=1$ не подходит. Из двух решений $u_1(r)=1$ и $u_2(r)=\frac{a}{r}$ можно построить целое семейство решений $u(r)=\alpha u_1(r)+\beta u_2(r)$, $\alpha+\beta=1$, которое будет удовлетворять поставленной задаче. Условие $\lim\limits_{r\to\infty} u=0$ позволяет выделить единственное решение внешней задачи Дирихле.

**Теорема единственности решения внешней задачи Дирихле в пространстве.** Внешняя задача Дирихле в пространстве $R^3$ может иметь только одно решение.

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ следующей задачи:

$\Delta u(M)=0$, $M\in\Omega'$,

$u(P)=\mu(P)$, $P\in S$,

$u(M)$ равномерно стремится к нулю при $M\to\infty$.

Введём функцию $w(M)=u_1(M)-u_2(M)$. Для $w(M)$ получим задачу

$\Delta w(M)=0$, $M\in\Omega'$,

$w(P)=0$, $P\in S$,

$w(M)$ равномерно стремится к нулю при $M\to\infty$.

Предположим, что в области $\Omega'$ существует точка $M_1$, в которой $w(M_1)\neq 0$ $(u_1(M_1)\neq u_2(M_1))$. Тогда выберем шар большого радиуса $R$ с границей $S_R$ так, чтобы точка $M_1$ лежала между поверхностями $S$ и $S_R$, и чтобы на поверхности $S_R$ выполнялось неравенство $|w(M)|<\varepsilon$ для произвольного малого $\varepsilon>0$. В замкнутой области, ограниченной поверхностями $S$ и $S_R$, получили гармоническую функцию $w(M)$; $w(M_1)\neq 0$ и $w(M)|_{M\in S}=0$, $|w(M)|_{M\in S_R}<\varepsilon$, $\varepsilon>0$. В силу принципа максимума $|w(M_1)|<\varepsilon$. В силу произвольности выбора числа $\varepsilon>0$ $w(M_1)=0$. Поэтому $u_1(M)=u_2(M)$ в области $\Omega'$. Теорема доказана.

**Замечание.** Внешняя задача Дирихле **на плоскости** ставится по-другому. Условие равномерного стремления функции к нулю на бесконечности надо заменить на условие её ограниченности на бесконечности: существует $N>0$, что $|u(M)|<N$. Требование обращения в нуль функции на бесконечности достаточно для единственности решения, но оно является слишком сильным, так как задача может оказаться вовсе неразрешимой.

**Пример.** Рассмотрим круг радиуса $a$ с границей $\gamma$. Требуется найти стационарное распределение температуры вне $\gamma$ при условии, что на границе поддерживается постоянная температура: $\Delta u(r)=0$, $r>a$, $u(r)|_{r=a}=u_0$. Решение уравнения $\Delta u(r)=0$ имеет вид $u(r)=A+B\ln\dfrac{1}{r}$. Так как $u(r)|_{r=a}=u_0$, то $u_0=A+B\ln\dfrac{1}{a}$. Из ограниченности решения на бесконечности $B = 0$, $A = u_0$ и $u = u_0$. Если потребовать, чтобы решение на бесконечности обращалось в нуль, то задача станет неразрешимой.

**п. 2. Регулярность гармонических функций на бесконечности. Формулы Грина в неограниченной области.**

Пусть $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**Определение.** Функция $u(M)$, $M \in R^3$, называется регулярной на бесконечности, если при всех достаточно больших $r$ выполнены неравенства $|u| \le \dfrac{A}{r}$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| \le \dfrac{A}{r^2}$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial y}\right| \le \dfrac{A}{r^2}$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial z}\right| \le \dfrac{A}{r^2}$, $A = const$.

Для регулярных на бесконечности функций справедливы формулы Грина. Рассмотрим некоторую область $\Omega \subset R^3$, ограниченную поверхностью $S$. Обозначим через $\Omega'$ область, являющуюся внешней к $S$. $R^3 = \Omega \cup S \cup \Omega'$.

**Теорема.** Пусть функции $u(M)$ и $v(M)$ регулярны на бесконечности и $u, v \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega}')$. Тогда для $u(M)$ и $v(M)$ имеет место первая формула Грина.

Доказательство. Вокруг области $\Omega$ опишем сферу $S_{R_0}$ радиуса $R_0$ так, чтобы $\Omega$ целиком лежала внутри шара $\Omega_{R_0}$. Обозначим через $\Omega'_{R_0}$ слой, лежащий между поверхностями $S_{R_0}$ и $S$. Область $\Omega'_{R_0}$ ограничена, поэтому в ней можно применить первую формулу Грина для функций $u(M)$ и $v(M)$:

$$\iiint\limits_{\Omega'_{R_0}} u \Delta v d\tau = \iint\limits_{S} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma + \iint\limits_{S_{R_0}} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma -$$

$$-\iiint_{\Omega'_{R_0}}(grad\, u\cdot grad\, v)d\tau\ . \qquad (8.1)$$

Здесь $\vec{n}$ является внешней нормалью к границе области $\Omega'_{R_0}$. Оценим интеграл по поверхности $S_{R_0}$, пользуясь регулярностью функций $u$ и $v$:

$$\left|\iint_{S_{R_0}} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma\right| = \left|\iint_{S_{R_0}} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)d\sigma\right| \le$$

$$\le \iint_{S_{R_0}}|u|\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\cdot|\cos\alpha|+\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|\cdot|\cos\beta|+\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\cdot|\cos\gamma|\right)d\sigma \le$$

$$\le \iint_{S_{R_0}}\frac{A}{R_0}\left(\frac{A}{R_0^2}+\frac{A}{R_0^2}+\frac{A}{R_0^2}\right)d\sigma = \iint_{S_{R_0}}\frac{3A^2}{R_0^3}d\sigma =$$

$$=\frac{3A^2}{R_0^3}4\pi R_0^2 = \frac{12A^2\pi}{R_0}.$$

Так как $\lim\limits_{R_0\to\infty}\dfrac{12A^2\pi}{R_0}=0$, то $\lim\limits_{R_0\to\infty}\iint_{S_{R_0}} u\dfrac{\partial v}{\partial n}d\sigma = 0$.

Теперь рассмотрим интеграл $\iiint_{\Omega'_{R_0}}(grad\, u\cdot grad\, v)d\tau$ и оценим его подынтегральное выражение:

$$|(grad\, u\cdot grad\, v)| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\cdot\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right| \le \frac{3A^2}{R_0^4}.$$

Так как подынтегральное выражение при $R_0\to\infty$ является величиной $O\left(\dfrac{1}{R_0^p}\right)$, $p>3$, то существует

$$\lim_{R_0\to\infty}\iiint\limits_{\Omega'_{R_0}}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau=\iiint\limits_{\Omega'}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau -$$

несобственный интеграл первого рода. Поэтому при $R_0\to\infty$ правая часть формулы (8.1) имеет предел, равный $\iint\limits_S u\dfrac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\iiint\limits_{\Omega'}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau$.

Следовательно, существует и предел левой части (8.1). Получили формулу

$$\iiint\limits_{\Omega'}u\Delta v d\tau=\iint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\iiint\limits_{\Omega'}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau. \qquad (8.2)$$

Она называется первой формулой Грина.

Поменяв местами функции $u$ и $v$ в соотношении (8.2) и вычтя из одного соотношения другое, получим вторую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega'}(u\Delta v-v\Delta u)d\tau=\iint\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma. \qquad (8.3)$$

Учитывая, что фундаментальное решение $\dfrac{1}{R_{MM_0}}$ уравнения Лапласа регулярно на бесконечности, получим третью формулу Грина для функции $u(M)$ в области $\Omega'$. При этом нормаль к поверхности $S$ должна быть внешней по отношению к $\Omega'$, т.е. направлена внутрь $\Omega$.

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega'}\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}d\tau_M\,.$$

**Замечание.** Гармоническая в области $\Omega'$ функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, является регулярной на бесконечности.

**п. 3. Единственность решений внешней задачи Неймана в пространстве.**

Пусть снова $\Omega'$ – неограниченная область, внешняя к замкнутой поверхности $S$.

Во внешней задаче Неймана надо найти регулярную гармоническую функцию, удовлетворяющую условиям

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in \Omega',$$

$$u \in C^1\left(\overline{\Omega}'\right) \cap C^2(\Omega'),$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = \nu(P), \quad P \in S.$$

Будем искать равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности функцию $u(M)$.

**Теорема.** Внешняя задача Неймана в $R^3$ имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения задачи Неймана $u_1(M)$ и $u_2(M)$ в области $\Omega'$. Тогда функция $w(M) = u_1(M) - u_2(M)$ удовлетворяет задаче $\Delta w(M) = 0$, $M \in \Omega'$; $\dfrac{\partial w(P)}{\partial n} = 0$, $P \in S$; $w(M)$ равномерно стремится к нулю при $M \to \infty$; $w \in C^2(\Omega') \cap C^1\left(\overline{\Omega}'\right)$. Поэтому к функции $w(M)$ можно применить первую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega'} w \cdot \Delta w \, d\tau_M = \iint\limits_{S} w(P) \frac{\partial w(P)}{\partial n_P} d\sigma_P - \iiint\limits_{\Omega'} (grad\, w \cdot grad\, w) d\tau_M .$$

Отсюда $grad\, w \equiv \bar{0}$ в $\Omega'$: $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$ в $\Omega'$, т.е.

$w(M) \equiv const$ в $\Omega'$. Так как функция $w(M)$ равномерно стремится к нулю на бесконечности, то $w(M) \equiv const = 0$, в $\Omega'$. Теорема доказана.

**Замечание.** Решение внешней задачи Неймана в $R^3$, регулярное на бесконечности, существует для любой функции $\nu \in C(S)$, требование $\iint\limits_S \nu(P)d\sigma_P = 0$ излишне.

## § 9. Внешние краевые задачи на плоскости.

**п.1.** Для уравнения Лапласа **на плоскости** требование равномерного стремления решения к нулю на бесконечности является жестким, такого решения может не существовать.

**Пример.** В полярных координатах $(r, \varphi)$ на плоскости рассмотрим задачу Дирихле вне круга радиуса $a \neq 1$:

$$\Delta u(r) = 0, \quad r > a,$$

$$u(r = a) = 1.$$

Можно построить два решения этой задачи $u_1(r) \equiv 1$ и $u_2(r) = \dfrac{\ln r}{\ln a}$. Других линейно независимых решений у этой задачи нет, общее решение уравнения $\Delta u(r) = 0$ имеет вид $u(r) = C_1 + C_2 \ln r$. Если потребовать, чтобы функция $u(r)$ равномерно стремилась к нулю на бесконечности, то ни одно из этих решений не подходит, задача не имеет решений. Условие равномерного стремления к нулю на бесконечности надо заменить требованием существования конечного предела решения на бесконечности. Тогда подходит решение $u_1(r) \equiv 1$.

**Определение.** Функция двух переменных $u(x,y)$ называется регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности.

**п.2.** Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле. Пусть в $R^2$ имеется ограниченная область $D$ с границей $\gamma$ и внешней к ней областью $D'$. $R^2 = D \cup \gamma \cup D'$. Тогда внешняя задача Дирихле заключается в нахождении функции $u(x,y)$, непрерывной в области $\overline{D}' = D' \cup \gamma$, гармонической в области $D'$, удовлетворяющей условию $u(P) = \mu(P)$, $P \in \gamma$, и ограниченной на бесконечности.

**Теорема.** Внешняя задача Дирихле на плоскости может иметь не более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения внешней задачи Дирихле $u_1(M)$ и $u_2(M)$ такие, что

$$\Delta u_i(M) = 0, \quad M \in D', \quad u_i \in C(\overline{D}') \cap C^2(D'),$$

$$u_i(P) = \mu(P), \quad P \in \gamma, \quad \mu(P) \in C(\gamma),$$

$$|u_i(M)| < \frac{N}{2}, \quad i = 1, 2, \quad N = const > 0.$$

Введём функцию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$. $v(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M) = 0, \quad M \in D', \quad v \in C(\overline{D}') \cap C^2(D'),$$

$$v(P) = 0, \quad P \in \gamma,$$

$$|v(M)| < N, \quad N = const.$$

Выберем внутри области $D$ точку $M_0$ и построим окружность $C^a_{M_0}$ радиуса $a$ с центром в точке $M_0$, целиком лежащую внутри $D$. Пусть $R_{MM_0}$ – расстояние между точками $M \in D'$ и $M_0$, тогда функция $u_a(M) = \ln \frac{R_{MM_0}}{a}$ гармоническая в $D'$ и положительна в $D'$, так как $R_{MM_0} > a$. Построим окружность $C_{M_0}^b$ радиуса $b$ с центром в точке $M_0$, содержащую границу $\gamma$ внутри себя. Введём функцию $u_b(M) = N \frac{\ln \frac{R_{MM_0}}{a}}{\ln \frac{b}{a}}$, которую будем называть "барьером". Функция $u_b(M)$ удовлетворяет следующим условиям: $\Delta u_b(M) = 0$, $M \in D''$, где $D''$ – область, заключенная между границами $\gamma$ и $C_{M_0}^b$; $u_b(M)\big|_{M \in \gamma} > 0$ и $u_b(M)\big|_{M \in C_{M_0}^b} = N$. Функция $v(M)$ удовлетворяет условиям $\Delta v(M) = 0$, $M \in D''$; $v(M)\big|_{M \in \gamma} = 0$ и $|v(M)| < N$, $M \in C_{M_0}^b$. $|v(M)| \le u_b(M)$ на границе области $D''$ и, следовательно, в силу принципа максимума $|v(M)| \le u_b(M)$ всюду в области $D''$. Фиксируем точку $M$ и устремим $b$ в бесконечность. $\lim\limits_{b \to \infty} u_b(M) = 0$, следовательно, $v(M) = 0$. В силу произвольности выбора точки $M$ получаем, что $v(M) \equiv 0$ в $D'$. Теорема доказана.

**п.3.** Докажем, что для гармонических в $D'$ функций, регулярных на бесконечности, справедливы формулы Грина.

**Лемма.** Для гармонической в $D'$ функции $u(x, y)$, регулярной на бесконечности, при достаточно больших значениях $r=\sqrt{x^2+y^2}$ справедливы следующие оценки первых производных: $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\le\frac{const}{r^2}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\le\frac{const}{r^2}$.

**Доказательство** леммы основано на преобразовании Кельвина гармонической функции $u(M)$, $M=M(x,y)$. Обозначим через $K_a$ открытый круг радиуса $a$ с центром в начале координат $O$, через $C_a$ – его границу. Открытая область $K'_a$ – внешность круга: $R^2=K_a\cup C_a\cup K'_a$. Точки $M\in K'_a$ и $N\in K_a$ называются симметричными относительно окружности $C_a$, если они лежат на одном луче, выходящем из $O$, и удовлетворяют соотношению $R_{OM}\cdot R_{ON}=a^2$. Такое преобразование называется инверсией; оно взаимно однозначно отображает $K'_a$ на $K_a\setminus O$. Пусть функция $u(M)$ гармонична в $K'_a$. Функция $v(N)=u(M)$ называется преобразованием Кельвина функции $u(M)$, если $M$ и $N$ симметричны относительно $C_a$. Можно доказать, что $v(N)$ является гармонической в $K_a\setminus O$. Для этого запишем координаты точек $M$ и $N$ в полярных координатах: $M=M(r,\varphi)$, $N=N(\rho,\varphi)$, $\rho=\frac{a^2}{r}$. Тогда

$$u(M)=u(r,\varphi),\qquad v(N)=v(\rho,\varphi)=u\left(\frac{a^2}{\rho},\varphi\right).$$

$\Delta_{(\rho,\varphi)}v(N)=\Delta_{(\rho,\varphi)}u\left(\frac{a^2}{\rho},\varphi\right)=\frac{r^4}{a^4}\cdot\Delta_{(r,\varphi)}u(M)$ (проверьте!).

Если функция $u(M)$ гармоническая в $K'_a$ и имеет конечный предел на бесконечности, то функция $v(N)$

гармоническая в $K_a \setminus O$ и имеет конечный предел в точке $O$. Поэтому она будет гармонической всюду в круге $K_a$ (это утверждает теорема об устранении особенности гармонической функции). Следовательно, в окрестности точки $O$ функция $v$ имеет ограниченные первые производные.

Выполняя обратное преобразование Кельвина, получим $u(M)=v\left(\dfrac{a^2}{r},\varphi\right)$. Если $M=M(x_M,y_M)$, $N=N(x_N,y_N)$ в декартовой системе координат с центром $O$, то $\dfrac{x_N}{x_M}=\dfrac{y_N}{y_M}=\dfrac{\rho}{r}=\dfrac{a^2}{r^2}=\dfrac{a^2}{x_M^2+y_M^2}$. Поэтому

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x_M}=\frac{\partial v(N)}{\partial x_M}=\frac{\partial v(N)}{\partial x_N}\cdot\frac{\partial x_N}{\partial x_M}+\frac{\partial v(N)}{\partial y_N}\cdot\frac{\partial y_N}{\partial x_M}.$$

$$\frac{\partial x_N}{\partial x_M}=\frac{a^2\cdot\left(y_M^2-x_M^2\right)}{r^4}=O\left(\frac{1}{r^2}\right),\ \frac{\partial y_N}{\partial x_M}=-\frac{2a^2x_My_M}{r^4}=O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Из ограниченности первых производных функции $v(N)$ в окрестности точки $O$ получаем $\dfrac{\partial u(M)}{\partial x_M}=O\left(\dfrac{1}{r^2}\right)$.

Аналогичная оценка справедлива для $\dfrac{\partial u(M)}{\partial y_M}$.#

**Теорема.** Для функций, гармонических в области $D'$ на плоскости и регулярных на бесконечности, справедлива первая формула Грина:

$$0=\iint_{D'}v\Delta u\,ds=\int_{\gamma}v\frac{\partial u}{\partial n}\,dl-\iint_{D'}(grad\,u\cdot grad\,v)ds\,.$$

Доказательство проводится аналогично пространственному случаю.

**п.4.** Внешняя задача Неймана:

$$\Delta u(M)=0,\quad M\in D',\quad u\in C^1(\overline{D}')\cap C^2(D'),$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}=\nu(P),\quad P\in\gamma,\ n$$ – нормаль к границе $\gamma$ в точке $P$,

функция $u(M)$ регулярна на бесконечности.

**Теорема.** Классическое решение внешней задачи Неймана на плоскости, ограниченное и регулярное на бесконечности, определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство. Пусть функция $u(M)$ – классическое решение задачи Неймана:

$$\Delta u(M)=0,\quad M\in D',\ u\in C^1(\overline{D}')\cap C^2(D'),$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}=\nu(P),\quad P\in\gamma,$$

$u(M)$ регулярна на бесконечности.

Пусть функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$– два различных решения поставленной задачи. Введём функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$, которая удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0,\quad M\in D',\ v\in C^1(\overline{D}')\cap C^2(D'),$$

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n}=0,\quad P\in\gamma,$$

$v(M)$ регулярна на бесконечности.

Применим к $v(M)$ первую формулу Грина:

$$\iint\limits_{D'}v(M)\Delta v(M)ds=\int\limits_{\gamma}v(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n}dl-\iint\limits_{D'}\left|grad\,v(M)\right|^2ds,$$

$$\left|grad\,v(M)\right|^2=\left(grad\,v(M)\cdot grad\,v(M)\right)=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Так как функция $v(M)$ удовлетворяет поставленной выше задаче, то $\iint\limits_{D'} \|grad\, v(M)\|^2 ds = 0$. Следовательно, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, т.е. $v(M) \equiv const$ в $D'$. Функция $v(M)$ имеет на бесконечности конечный предел, вообще говоря, не равный нулю. Отсюда и следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

**Замечание.** Для существования решения внешней задачи Неймана на плоскости необходимо выполнение условия $\int\limits_{\Gamma} \nu(P) dl = 0$.

**Замечание.** Были поставлены и рассмотрены внешние краевые задачи на плоскости для уравнения Лапласа. Доказанные утверждения справедливы и для уравнения Пуассона $\Delta u = -f$, так как разность двух возможных его решений $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$ является решением той же краевой задачи для уравнения Лапласа.

## § 10. Функция Грина внутренней задачи Дирихле. Свойства функции Грина.

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона в пространственной области $\Omega$:

$$\Delta u(M) = -f(M), \quad M \in \Omega, \quad u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega),$$

$$u(P) = \mu(P), \quad P \in S.$$

Запишем интегральное представление решения этой задачи:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PM_0}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left( \frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right\} d\sigma_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}d\tau_M. \tag{10.1}$$

Пусть функция $v(M)$ гармоническая в области $\Omega$ и непрерывна вместе с первыми производными в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Применим к функциям $u(M)$ и $v(M)$ вторую формулу Грина:

$$0=\iint\limits_{S}\left\{v(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P}\right\}d\sigma_P-$$

$$-\iiint\limits_{\Omega}v(M)\Delta u(M)d\tau_M. \tag{10.2}$$

Сложим формулы (10.1) и (10.2), получим

$$u(M_0)=\iint\limits_{S}\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}G(P,M_0)-u(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P}\right\}d\sigma_P-$$

$$-\iiint\limits_{\Omega}G(M,M_0)\Delta u(M)d\tau_M,$$

где $\quad G(M,M_0)=\dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}}+v(M)$.

Если потребовать, чтобы выполнялось условие $G(P,M_0)=0, \quad P\in S$, то

$$u(M_0)=-\iint\limits_{S}u(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P}d\sigma_P-$$

$$-\iiint\limits_{\Omega}\Delta u(M)G(M,M_0)d\tau_M. \tag{10.3}$$

**Определение.** Функция $G(M,M_0)$ называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, если

1. $\quad G(M,M_0)=\dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}}+v(M)$, где функция $v(M)$ гармонична всюду в области $\Omega\subset R^3$;

2. $G(P,M_0)=0, \quad P\in S$.

Из определения следует, что функция Грина $G(M,M_0)$ с точностью до гармонической функции $v$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Второе условие в определении продиктовано типом граничных условий. Если функция Грина $G(M,M_0)$ существует, то решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона находится в явном виде по формуле

$$u(M_0)=-\iint_S \mu(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P}d\sigma_P +$$

$$+\iiint_\Omega f(M)G(M,M_0)d\tau_M\,. \qquad (10.4)$$

**Замечание.** Формула (10.4) содержит производную $\dfrac{\partial G(M,M_0)}{\partial n_M}$, существование которой не следует из определения.

Формула (10.4) даёт классическое решение задачи Дирихле при выполнении условий $\mu\in C(S)$ и $f\in C^1(\overline{\Omega})$.

Для построения функции Грина $G(M,M_0)$ необходимо найти функцию $v(M)$, удовлетворяющую задаче

$$\Delta v(M)=0, \quad M\in\Omega, \qquad (10.5)$$

$$v(P)=-\frac{1}{4\pi R_{PM_0}}, \quad P\in S. \qquad (10.6)$$

Для достаточно широкого класса поверхностей (так называемых поверхностей Ляпунова) задача (10.5), (10.6) разрешима, поэтому функция Грина существует.

Свойства функции Грина.

1. $G(M,M_0)>0$, если $M, M_0\in\Omega$.

Доказательство. Возьмем точку $M_0$, в которой функция Грина имеет особенность и вырежем её шаром $K_\varepsilon$, ограниченным поверхностью $\Sigma_\varepsilon$. Из представления функции Грина следует, что на поверхности $\Sigma_\varepsilon$ и внутри неё $G(M,M_0)>0$ и $G(P,M_0)=0$, $P\in S$. Так как функция Грина $G(M,M_0)$ в области, заключенной между поверхностями $\Sigma_\varepsilon$ и $S$, удовлетворяет уравнению Лапласа, то в силу принципа минимума $G(M,M_0)>0$ всюду в области, заключенной между поверхностями $\Sigma_\varepsilon$ и $S$. В силу произвольности выбора $\varepsilon$ получаем $G(M,M_0)>0$ всюду в области $\Omega$.

**Замечание.** Так как функция $v(M)$ удовлетворяет задаче (10.5), (10.6), то из принципа максимума следует, что $v(M)<0$ всюду в области $\Omega$. Следовательно, $G(M,M_0)=\dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}}+v(M)<\dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}}$. Отсюда получаем границы изменения значений функции $G(M,M_0)$:

$$0\le G(M,M_0)<\frac{1}{4\pi R_{MM_0}},\quad M\ne M_0,$$

причём равенство нулю учитывает, что $G(P,M_0)=0$, $P\in S$.

2. Функция Грина симметрична относительно точек $M_0$ и $M$: $G(M,M_0)=G(M_0,M)$.

Доказательство. Пусть $M_1$ и $M_2$ – некоторые фиксированные точки области $\Omega$. Построим сферы $\Sigma_\varepsilon^{M_1}$ и $\Sigma_\varepsilon^{M_2}$ радиусов $\varepsilon$ с центрами в точках $M_1$ и $M_2$. Введём функции $w_1(M)=G(M,M_1)$ и $w_2(M)=G(M,M_2)$ и применим к ним вторую формулу Грина в области

$\Omega\setminus\left(K_\varepsilon^{M_1}\cup K_\varepsilon^{M_2}\right)$, где $K_\varepsilon^{M_1}$ и $K_\varepsilon^{M_2}$ – шары радиусов $\varepsilon$ с центрами в точках $M_1$ и $M_2$.

$$\iiint\limits_{\Omega\setminus\left(K_\varepsilon^{M_1}\cup K_\varepsilon^{M_2}\right)}\left(w_1(M)\Delta w_2(M)-w_2(M)\Delta w_1(M)\right)d\tau_M =$$

$$=\iint\limits_S\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P.$$

Учитывая, что функции $w_1(M)$ и $w_2(M)$ удовлетворяют уравнению Лапласа в $\Omega\setminus M_1$ и в $\Omega\setminus M_2$ соответственно, а на границе $S$ области $\Omega$ принимают нулевые значения, получим

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=0,$$

где нормали $n_P$ к поверхностям $\Sigma_\varepsilon^{M_1}$ и $\Sigma_\varepsilon^{M_2}$ направлены внутрь шаров $K_\varepsilon^{M_1}$ и $K_\varepsilon^{M_2}$.

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=0.$$

(10.7)

Функции $w_1(M)$ и $w_2(M)$ внутри шаров $K_\varepsilon^{M_2}$ и $K_\varepsilon^{M_1}$ соответственно удовлетворяют уравнению Лапласа. Напишем интегральное представление функции $w_1(M)$ в точке $M_2$ и функции $w_2(M)$ в точке $M_1$:

$$w_1(M_2) = \iint_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}} \left( w_1(P)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P} - G(P,M_2)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P} \right) d\sigma_P =$$

$$= \iint_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}} \left( G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P} - G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P} \right) d\sigma_P .$$

(10.8)

$$w_2(M_1) = \iint_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}} \left( w_2(P)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P} - G(P,M_1)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P} \right) d\sigma_P =$$

$$= \iint_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}} \left( G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P} - G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P} \right) d\sigma_P .$$

(10.9)

Используя в формуле (10.7) полученные для функций $w_1(M)$ и $w_2(M)$ их интегральные представления (10.8) и (10.9) в точках $M_2$ и $M_1$, приходим к равенству $w_1(M_2) - w_2(M_1) = 0$ или $G(M_1,M_2) = G(M_2,M_1)$. Это свойство называется принципом взаимности.

Функция Грина задачи Дирихле $G(M,M_0)$ допускает различные физические интерпретации. Мы примем электростатическую интерпретацию. Пусть поверхность $S$, ограничивающая область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, сделана из идеального проводника и заземлена. Поместим в точке $M_0$ внутри $\Omega$ электрический заряд величины $\dfrac{1}{4\pi}$. Этот заряд индуцирует распределение зарядов на $S$. Поэтому потенциал электростатического поля в области $\Omega$ (в вакууме в системе единиц СГСЭ) равен сумме потенциала $\dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}}$ поля точечного заряда и потенциала $v(M,M_0)$ поля индуцированных зарядов. Эта сумма и равна $G(M,M_0)$.

Если мысленно убрать индуцированные на $S$ заряды, то для сохранения прежнего потенциала $G$ в области $\Omega$ придется разместить некоторые точечные заряды вне поверхности $S$, которые в $\Omega$ создадут поле с потенциалом $v$. Эти заряды являются зеркальными относительно $S$ изображениями заряда, помещенного в точку $M_0$. Такой прием позволяет для областей простой геометрической формы найти $v(M,M_0)$ и построить функцию Грина.

Принцип взаимности $G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$ означает, что заряд, помещённый в точку $M_1$, создаст в точке $M_2$ такой же потенциал, как потенциал в точке $M_1$, создаваемый таким же зарядом, помещённым в $M_2$.

**Пример.** Методом электростатических изображений найдём функцию Грина следующей задачи:

$\Delta u(x,y,z)=0$

в $\Omega=\{-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty, 0<z<+\infty\}$;

$u\big|_{z=0}=\mu(x,y)$;

$u(x,y,z)$ равномерно стремится к нулю при

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty$.

Заряд величины $\frac{1}{4\pi}$, помещённый в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, создал бы в точке $M(x,y,z) \in \Omega$ потенциал $\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}$, если бы не было границы $S = \{z=0\}$, на которой индуцируются заряды. Заменим эти индуцированные на $S$ заряды на зеркальное изображение заряда, помещённого в $M_0$; для этого надо в точке $T(x_0, y_0, -z_0)$ разместить заряд величины $-\frac{1}{4\pi}$.

$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MT}}$. Для построения решения найдём

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n_M}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial G}{\partial(-z)}\right|_{z=0} = \frac{-z_0}{2\pi \cdot \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Получили интегральное представление решения:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} \mu(x,y)\,dx\,dy \quad -$$

интеграл Пуассона для полупространства $z > 0$.

## § 11. О существовании решений краевых задач.

В данной главе мы уделяли основное внимание математическим постановкам краевых задач для уравнения Лапласа и доказательству единственности их решений. Полное исследование корректности этих задач (существование решения, его единственность и устойчивость) можно получить из теории Фредгольма, если свести краевую задачу к интегральному уравнению. В основе метода такого сведения лежат свойства потенциалов простого или двойного слоя (и объемного потенциала в случае уравнения Пуассона в пространственной области). Изучение этих вопросов выходит за рамки нашего курса. В случае, когда область $\Omega$ имеет простую геометрическую форму, решение краевой задачи можно получить в явном виде, а затем изучить его свойства (например, доказать, что оно является классическим). Методы построения решения позволяют задать его некоторыми формулами: например, полученным в § 10 интегралом Пуассона для полупространства. Подчеркнём, что эти формулы требуют обоснования. Для такого обоснования могут потребоваться дополнительные предположения о входной информации задачи.

В качестве примера построения формального решения рассмотрим метод разделения переменных для задач Дирихле в круге и вне круга.

**Внутренняя задача.** В полярной системе координат $r$, $\varphi$ на плоскости

$$\Delta u(r,\varphi)\equiv\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,,\,0\le r<a\,,\,0\le\varphi<2\pi\,;$$

$u(a,\varphi)=f(\varphi),\,0\le\varphi<2\pi$. $f$ — непрерывная функция на окружности $r=a\,,\,0\le\varphi\le 2\pi$ (следовательно, $f(0)=f(2\pi)$ ). Удобно полагать, что переменная $\varphi$ принимает все действительные значения, и тогда из однозначности функции $u$ для всех $\varphi$ вытекает

$u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi)$, а $f(\varphi)$ должна быть периодически продолжена на $-\infty<\varphi<+\infty$ с периодом $2\pi$.#

**Решение.** Найдём сначала нетривиальные частные решения уравнения Лапласа в круге вида $R(r)\cdot\Phi(\varphi)$. Подставим это произведение в уравнение и разделим его на $\dfrac{R(r)\cdot\Phi(\varphi)}{r^2}$. Проведём разделение переменных. Тогда получим две задачи для отличных от тождественного нуля функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$:

$$\begin{cases}\Phi''_{\varphi\varphi}+\lambda\cdot\Phi=0,\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi), \quad -\infty<\varphi<+\infty;\end{cases}$$

$$r\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dR}{dr}\right)=\lambda\cdot R, \quad 0\le r<a;$$

с подлежащим определению параметром $\lambda$.

При $\lambda<0$ периодических решений $\Phi(\varphi)$ нет. При $\lambda\ge 0$ общее решение уравнения имеет вид $\Phi(\varphi)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)$, а условие периодичности даёт $\sqrt{\lambda}=n=0,1,2,\ldots$ Итак, при каждом указанном $n$ $\Phi_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi)$ — искомые решения.

Относительно $R(r)$ имеем уравнение Эйлера $r^2 R''_{rr} + rR'_r - \lambda R = 0$, которое заменой независимой переменной $r = e^p$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами относительно $R = R(r(p))$: $R''_{pp} - \lambda R = 0$. При $\lambda = 0$ имеем $R = C_0 + H_0 \cdot p = C_0 + H_0 \cdot \ln r$, $C_0$ и $H_0$ – произвольные постоянные. При $\lambda > 0$ имеем $R = C \cdot e^{-\sqrt{\lambda} p} + H \cdot e^{\sqrt{\lambda} p} = C \cdot r^{-\sqrt{\lambda}} + H \cdot r^{\sqrt{\lambda}}$, $C$ и $H$ – произвольные постоянные. Функции $\ln r$ и $r^{-\sqrt{\lambda}}$, $\lambda > 0$, имеют особенности при $r = 0$; решая **внутреннюю задачу в круге**, мы должны их отбросить.

Теперь $r^n \cdot (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — частные решения уравнения Лапласа в круге, а в силу линейности уравнения Лапласа

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

— его общее решение. Для нахождения решения исходной задачи Дирихле подставим полученный ряд в краевое условие и разложим $f(\varphi)$ в ряд Фурье по системе синусов и косинусов.

Формальное решение:

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cdot(\alpha_n\cdot\cos n\varphi+\beta_n\cdot\sin n\varphi)\quad,$$

где

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)d\xi\,,\qquad \alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\cos n\xi\,d\xi\,,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\sin n\xi\,d\xi\,.\#$$

**Замечание.** Решение, построенное в виде ряда , можно записать в виде интеграла, который называется **интегралом Пуассона.** Для этого подставим выражения $\alpha_n$ и $\beta_n$ в ряд, дающий решение предыдущей задачи. Поменяем порядок суммирования и интегрирования.

Тогда $$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cdot\cos n(\varphi-\xi)\right\}d\xi\,.$$

Для преобразования выражения в фигурных скобках вспомним, что

$\cos n(\varphi-\xi)=\frac{1}{2}\left(\exp\{in(\varphi-\xi)\}+\exp\{-in(\varphi-\xi)\}\right)$ ( $i$ — мнимая единица ); учтём условие $0<\frac{r}{a}<1$, записывая суммы членов двух геометрических прогрессий со знаменателями $\frac{r}{a}\cdot\exp\{\pm in(\varphi-\xi)\}$. В результате вместо ряда Фурье решение $u(r,\varphi)$ получится в виде интеграла:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\cdot\frac{a^2-r^2}{r^2-2r\cdot a\cdot\cos(\varphi-\xi)+a^2}\cdot d\xi .\#$$

**Внешняя задача.** В области $0<a<r<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$ ($r,\varphi$ – полярные координаты) надо найти гармоническую функцию, **регулярную на бесконечности.** В двумерном случае это требование сводится к ограниченности искомого решения $u(r,\varphi)$. Разделяя переменные в уравнении Лапласа в полярной системе координат, мы должны теперь отбросить $\ln r$ и $r^{\sqrt{\lambda}}$, $\lambda>0$. Решение уравнения Лапласа вне круга, регулярное на бесконечности, надо строить в виде

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}\cdot\left(A_n\cdot\cos n\varphi+B_n\cdot\sin n\varphi\right).$$

Раскладывая в ряд Фурье по системе синусов и косинусов заданную при $0\le\varphi\le2\pi$ непрерывную функцию $f(\varphi)$ в краевом условии $u|_{r=a}=f$ ($f(0)=f(2\pi)$), мы найдём все $A_n$ и $B_n$. Учитывая, что $0<\frac{a}{r}<1$, запишем построенное формальное решение:

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n\cdot(\alpha_n\cdot\cos n\varphi+\beta_n\cdot\sin n\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\cdot\frac{r^2-a^2}{r^2-2r\cdot a\cdot\cos(\varphi-\xi)+a^2}d\xi\ ,$$

где $\alpha_n$ и $\beta_n$ – коэффициенты Фурье функции $f$.

Полученные в виде функциональных рядов формальные решения этих задач требуют дополнительного изучения. Мы получим классическое решение, если докажем, что задающий его функциональный ряд можно два раза дифференцировать почленно, и выполнены все требования, предъявляемые к классическому решению.

# Глава 3. Задачи для уравнения колебаний.

## § 1. Построение уравнения малых поперечных колебаний струны.

Найдём дифференциальное уравнение, описывающее малые поперечные колебания однородной струны. Под струной длины $l$ мы понимаем тонкую гибкую упругую нить из однородного материала. В невозмущённом состоянии её можно представить себе как отрезок $0\le x\le l$ оси $Ox$ в пространстве. Будем считать, что смещения всех точек струны при её возмущении расположены в одной плоскости и происходят только в перпендикулярном к $Ox$

направлении. Тогда для описания процесса колебаний струны достаточно ввести одну функцию: $u(x,t)$- поперечное смещение точки струны с координатой $x$ в момент времени $t$ по отношению к её невозмущённому состоянию. Мы выведем дифференциальное уравнение в частных производных для $u(x,t)$. Заметим, что $u_t(x,t)$- поперечная скорость движения точки струны с координатой $x$ в момент времени $t$, а $u_{tt}(x,t)$- её ускорение.

Однородность материала струны означает, что его физические свойства не зависят от координаты $x$. В частности, линейная плотность массы $\rho$ (плотность массы, приходящаяся на единицу длины) постоянна: $\rho = \rho_0 = const$.

В возмущённом состоянии струны в ней возникают силы упругости – внутренние силы натяжения струны. Это силы, с которыми соседние участки струны действуют друг на друга. Будем предполагать, что колебания струны настолько малы для её материала, что силы упругости описываются законом Гука. Предположим также, что силы упругости в каждой точке струны направлены по касательной к ней, причем их составляющие, параллельные оси $Ox$, постоянны; тогда все движения могут быть лишь поперечными. Можно показать, что составляющие сил упругости, перпендикулярные к $Ox$, с хорошей точностью описываются выражениями $T_0 \cdot u_x(x,t)$, где $T_0 = const$. В этих предположениях мы и выведем уравнение колебаний.

Выделим участок струны $[x_1, x_2]$ и рассмотрим его движение в промежутке времени $[t_1, t_2]$. Вывод уравнения поперечных колебаний струны основан на втором законе Ньютона: изменение количества движения участка струны $[x_1, x_2]$ за время $t_2 - t_1$ обусловлено импульсом сил, приложенных к этому участку в течение указанного времени. В момент времени $t$ участок струны $[x_1, x_2]$ обладает количеством движения $\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho_0 \cdot u_t(\xi, t) d\xi$.

В течение времени $[t_1, t_2]$ изменение количества движения равно $\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho_0 \cdot [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi$. В момент времени $t$ на выделенный участок $[x_1, x_2]$ действуют силы натяжения струны $T_0 \cdot u_x(x_2, t) - T_0 \cdot u_x(x_1, t)$ и некоторые внешние силы (например, сила тяжести), распределённые вдоль струны с линейной плотностью $F(x,t)$ ($F$ - внешняя сила, приходящаяся на единицу длины струны). Если учитывать только силы упругости (т.е. силы натяжения струны) и указанные внешние силы, но не учитывать, например, силы трения, то получаем уравнение поперечных колебаний струны в интегральной форме:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho_0 \cdot [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi = \int\limits_{t_1}^{t_2} T_0 \cdot [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{x_1}^{x_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \tag{1.1}$$

Чтобы перейти от уравнения (1.1) к дифференциальному уравнению относительно функции $u(x,t)$, предположим существование у неё вторых производных $u_{tt}$ и $u_{xx}$ и их непрерывность. Применим к выражениям $u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)$ и $u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)$ теорему Лагранжа, а к каждому интегралу в (1.1) – интегральную теорему о среднем; тогда получим

$$\rho_0 \cdot u_{tt}(\xi^*, t^*) \cdot \Delta t \cdot \Delta x = \left(T_0 \cdot u_{xx}(\xi^{**}, t^{**}) + F(x^{***}, t^{***})\right)\Delta x \cdot \Delta t,$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$. Сокращая на $\Delta x \cdot \Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$, получаем дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\rho_0 \cdot u_{tt}(x,t) = T_0 \cdot u_{xx}(x,t) + F(x,t).$$

Запишем его в виде

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} + f(x,t), \qquad (1.2)$$

где $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho_0}$, $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho_0}$. Отметим, что постоянная $a = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho_0}}$ имеет размерность скорости $\left(\dfrac{м}{сек}\right)$. Уравнение (1.2) называется уравнением поперечных колебаний струны. Эти колебания вынужденные: они происходят под действием внешних сил. Если же внешние силы отсутствуют, то имеем уравнение свободных колебаний:

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}. \qquad (1.3)$$

Свободные колебания обусловлены только силами упругости струны.

Уравнения (1.2) или (1.3) выполняются для всех внутренних точек струны, т.е. на интервале $0 < x < l$. Информацию о поведении концов струны надо задать отдельно. Например, если известно, что конец струны $x = 0$ неподвижен (жёстко закреплён), то $u(0,t) = 0$. Если в эксперименте измеряется его положение во все моменты времени, то $u(0,t) = \mu(t)$ – известная функция. Если измеряется действующая на этот конец внешняя поперечная сила, то $u_x(0,t) = \nu(t)$ – известная функция. В частности, если внешние силы на конец $x = 0$ не действуют (конец свободен), то $u_x(0,t) = 0$. Аналогичные граничные условия могут выполняться и на конце $x = l$. Если в некоторый момент времени $t_0$ известен профиль струны, то $u(x,t_0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le l$, – заданная функция. Если в этот момент времени измерены скорости поперечного движения точек струны, то $u_t(x,t_0) = \psi(x)$, $0 \le x \le l$, – известная функция.

Уравнения (1.2) и (1.3) являются уравнениями гиперболического типа (см. введение). К таким же уравнениям приводят аналогичные по смыслу предположения о малых продольных колебаниях упругого стержня, о колебаниях в электрических цепях и т.п.

**Пример.** Одномерный однородный упругий стержень $0 \le x \le l$ находится в состоянии покоя в моменты времени $t \le 0$. В моменты времени $t \ge 0$ к его концам приложены противоположно направленные продольные (вдоль оси $Ox$) растягивающие силы величины $f = const$ каждая. Тогда продольное смещение $u(x,t)$ точки, имевшей в состоянии покоя координату $x$, удовлетворяет задаче для уравнения **свободных** колебаний (на интервале $0 < x < l$ внешние силы на стержень не действуют):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$u_x(0,t) = \dfrac{f}{k}$, $u_x(l,t) = \dfrac{f}{k}$, $t > 0$, $k$ – коэффициент упругости;

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l.$$

## § 2. Задачи Коши для уравнения колебаний на прямой.

Область изменения пространственной переменной $x$ может быть неограниченной. Если нас интересуют колебания струны на участке вдали от её концов и в таком промежутке времени, когда влияние концов не успевает ещё сказаться на выбранном участке, то струну можно считать бесконечной.

**Пример.** Бесконечная струна $\{-\infty < x < +\infty,\ y = 0,\ z = 0\}$ в момент времени $t = 0$ имела изгиб (поперечное отклонение от оси $Ox$ в направлении $Oz$) $\varphi(x)$ и поперечную скорость $\psi(x)$. Колебания струны вынужденные – под действием распределённой вдоль неё поперечной силы. Тогда поперечное смещение $u(x,t)$ удовлетворяет в области $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$ задаче без краевых условий – задаче Коши (см. (2.1), (2.2)).

**п.1. Метод Даламбера.**

Сформулируем задачу Коши для уравнения колебаний на прямой:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in R^1. \tag{2.2}$$

**Определение.** Классическим решением задачи (2.1), (2.2) называется функция $u(x,t)$, определенная при $x \in R^1, t \geq 0$ и непрерывная вместе со своей первой производной по $t$ в области $x \in R^1, t \geq 0$, имеющая непрерывные вторые производные в области $x \in R^1, t > 0$ и удовлетворяющая уравнению (2.1) и начальным условиям (2.2).

Из линейности задачи (2.1), (2.2) следует, что можно провести её редукцию и представить $u(x,t)$ в виде суммы двух функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, где $u_1(x,t)$ – решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний и неоднородных начальных условий, $u_2(x,t)$ –

решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний и однородных начальных условий.

Рассмотрим сначала задачу для **однородного** уравнения колебаний и неоднородных начальных условий:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0, \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in R^1. \tag{2.4}$$

Предположим, что существует классическое решение $u(x,t)$ этой задачи. Преобразуем уравнение колебаний к виду, содержащему смешанную производную. Введём новые переменные $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. Тогда $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $t = \frac{1}{2a}(\eta - \xi)$, и искомая функция будет иметь вид $U(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2a}\right)$. Её производная $U_\xi = u_x \cdot x_\xi + u_t \cdot t_\xi = \frac{1}{2} \cdot u_x - \frac{1}{2a} \cdot u_t$. Смешанная производная $U_{\xi\eta} = \frac{1}{4} \cdot u_{xx} + \frac{1}{4a} \cdot u_{xt} - \frac{1}{4a} \cdot u_{tx} - \frac{1}{4a^2} \cdot u_{tt} = 0$ в силу уравнения (2.3). Уравнение

$$U_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0 \tag{2.5}$$

легко проинтегрировать. Оно означает, что $U_\xi(\xi,\eta)$ не зависит от $\eta$, то есть $U_\xi(\xi,\eta) = \bar{f}(\xi)$. Проинтегрируем последнее равенство: $U(\xi,\eta) = \int \bar{f}(\xi) d\xi + const$, где постоянная не зависит от $\xi$, но может зависеть от $\eta$. Таким образом,

$$U(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{2.6}$$

где $f_1$ и $f_2$ – произвольные функции. Возвращаясь к прежним переменным $x$, $t$ и требуя $f_1 \in C^2$, $f_2 \in C^2$, мы получим общий вид решения $u(x,t)$ уравнения (2.3):

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at). \qquad (2.7)$$

Определим функции $f_1$ и $f_2$ таким образом, чтобы выполнялись начальные условия (2.4):

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$u_t(x,0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x), \quad x \in R^1,$$

где штрих означает производную по полному аргументу.

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ -f_1(x) + f_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz + C, \quad C = const. \end{cases}$$

Отсюда

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz - \frac{C}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz + \frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) называется формулой Даламбера, а метод построения решения задачи (2.3), (2.4) называется методом Даламбера.

Функции вида $f_1(x - at)$ и $f_2(x + at)$ описывают волны, распространяющиеся вдоль оси $Ox$ со скоростью $a$. Поэтому уравнение колебаний называют ещё волновым уравнением.

## п.2. Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши.

**Теорема существования и единственности решения задачи Коши.** Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на $R^1$. Тогда классическое решение задачи Коши (2.3), (2.4) существует, единственно и определяется формулой Даламбера.

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда непосредственной проверкой устанавливаем, что функция $u(x,t)$, представимая формулой Даламбера, является классическим решением задачи. (Подставьте (2.8) в (2.3) и (2.4).)

Докажем теперь, что решение задачи единственно. Если решение существует, то оно представимо формулой Даламбера. Если есть второе решение, то оно так же представимо формулой Даламбера. Разность двух решений $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению и нулевым начальным условиям и так же представима формулой Даламбера. Подставляя в формулу Даламбера нулевые начальные условия, получаем $v(x,t)\equiv 0$ и $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$. Теорема доказана.

Формула Даламбера даёт возможность доказать устойчивость решения задачи Коши по начальным данным.

**Теорема устойчивости решения задачи Коши.** Пусть функции $\varphi(x)$, $\widetilde{\varphi}(x)$, $\psi(x)$, $\widetilde{\psi}(x)$– начальные данные двух задач Коши

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in R^1,$$

$$\widetilde{u}_{tt}(x,t) = a^2 \widetilde{u}_{xx}(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0,$$
$$\widetilde{u}(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad \widetilde{u}_t(x,0) = \widetilde{\psi}(x), \quad x \in R^1.$$

При любом конечном $T > 0$ для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta(\varepsilon, T) > 0$, что если функции $\varphi$, $\widetilde{\varphi}$, $\psi$, $\widetilde{\psi}$ удовлетворяют неравенствам $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x)| < \delta$, $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |\psi(x) - \widetilde{\psi}(x)| < \delta$, то решения $u(x,t)$ и $\widetilde{u}(x,t)$ удовлетворяют неравенству $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)| < \varepsilon$ при $0 \le t \le T$.

Доказательство.

$$|u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)| \le \frac{1}{2}|\varphi(x-at) - \widetilde{\varphi}(x-at)| +$$
$$+ \frac{1}{2}|\varphi(x+at) - \widetilde{\varphi}(x+at)| + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}|\psi(z) - \widetilde{\psi}(z)|dz.$$

Тогда $\quad |u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)| \le \dfrac{\delta}{2} + \dfrac{\delta}{2} + \dfrac{1}{2a} 2a\delta t \le \delta(1+T).$

Выбирая $\quad \delta = \dfrac{\varepsilon}{1+T}$, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема устойчивости означает, что если начальные данные двух задач мало отличаются друг от друга в указанном смысле, то и их решения мало отличаются в момент времени $t \in [0, T]$.

Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши (2.3), (2.4) означают, что эта задача **корректно поставлена**.

## п. 3. Существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний на прямой.

Рассмотрим задачу Коши для **неоднородного** уравнения колебаний:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0,\qquad (2.9)$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in R^1.\qquad (2.10)$$

Пусть функция $w(x,t,\tau)$ является решением вспомогательной задачи Коши с параметром $\tau$

$$w_{tt}(x,t,\tau)=a^2w_{xx}(x,t,\tau),\quad x\in R^1,\quad t>0,\qquad (2.11)$$

$$w(x,t,\tau)\big|_{t=\tau}=0,\quad \left.\frac{\partial w(x,t,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau}=f(x,\tau),\quad x\in R^1.\qquad (2.12)$$

Формула Даламбера даёт решение задачи (2.11), (2.12):

$$w(x,t,\tau)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi.$$

Легко понять, что для построения решения задачи (2.9), (2.10) осталось проинтегрировать функцию $w(x,t,\tau)$ по переменной $\tau$ в пределах от $0$ до $t$.

**Теорема.** Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ в области $x\in R^1,\ t>0$. Тогда задача (2.9), (2.10) имеет решение, оно единственно и определяется формулой $u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$.

Доказательство. Найдём $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$, дифференцируя зависящий от параметра $x$ интеграл по формуле Лейбница:

$$u_x(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\left(f(\xi,\tau)\Big|_{\xi=x+a(t-\tau)}-f(\xi,\tau)\Big|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau,$$

$$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\left(\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=x+a(t-\tau)}-\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Найдём $u_t(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$, дифференцируя зависящий от параметра $t$ интеграл по формуле Лейбница:

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left(f(\xi,\tau)\Big|_{\xi=x+a(t-\tau)}+f(\xi,\tau)\Big|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau,$$

$$u_{tt}(x,t)=f(x,t)+\frac{a}{2}\int\limits_0^t\left(\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=x+a(t-\tau)}-\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Подставляя полученные выражения производных $u_{tt}(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в уравнение (2.9), а $u(x,t)$ и $u_t(x,t)$ – в начальные условия (2.10), убеждаемся в том, что $u(x,t)$ является решением задачи Коши (проверьте!).

Если бы существовали два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (2.9), (2.10) , то функция $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяла бы задаче

$$w_{tt}(x,t)=a^2w_{xx}(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0,$$
$$w(x,0)=0,\quad w_t(x,0)=0,\quad x\in R^1.$$

Но по теореме единственности решения последней задачи нет решений, отличных от $w(x,t)\equiv 0$. Теорема доказана.

**Замечание.** Решение задачи

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in R^1$$

можно записать в виде

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau\cdot$$

Эта формула также называется формулой Даламбера. Её смысл легко прояснить, если на плоскости $Oxt$ независимых переменных фиксировать точку $M(x_0,t_0)$, $t_0>0$, и провести через неё две прямые $x-at=x_0-at_0$, $x+at=x_0+at_0$. Они пересекут ось $Ox$ в точках $P(x_0-at_0,0)$ и $Q(x_0+at_0,0)$ соответственно. Эти прямые называются характеристиками уравнения колебаний, а треугольник $MPQ$ – характеристическим треугольником. Значение решения $u$ в точке $x_0$ в момент времени $t_0$ определяется только значениями функции $\varphi$ в точках $P$ и $Q$, только интегралом от функции $\psi$ по отрезку $[P,Q]$ и только интегралом от функции $f$ по треугольнику $MPQ$. Если изменить входные данные задачи вне замкнутого треугольника $MPQ$, то решение в точке $M$ не изменится.

Если требуется найти зависимость $u(x,t_0)$ от координаты $x$ в фиксированный момент времени $t_0$, то надо двигать точку $M$ вдоль прямой $t=t_0$ на плоскости $Oxt$, для каждого положения точки $M$ строить характеристический треугольник и с его помощью находить решение в точке $M$. Точно так же можно "расшифровать" формулу Даламбера, если требуется найти зависимость $u(x_0,t)$ от времени $t$ в фиксированной точке $x_0$. Надо двигать точку $M$ вдоль прямой $x=x_0$, для каждого положения точки $M$ строить характеристический треугольник и с его помощью находить по формуле Даламбера зависимость $u(x_0,t)$.

**Задача.** Пусть $f\equiv 0$, $\psi\equiv 0$, $\varphi(x)>0$ в интервале $x_1<x<x_2$ и $\varphi(x)=0$ вне этого интервала. При $t>0$ на плоскости $Oxt$ найдите все точки, в которых

$1^0$. $u(x,t)=0$;

$2^0$. $u(x,t)$ определяется двумя ненулевыми значениями функции $\varphi$;

$3^0$. $u(x,t)$ определяется лишь одним ненулевым значением функции $\varphi$.

**Задача.** Пусть $f\equiv 0$, $\varphi\equiv 0$, $\psi(x)>0$ в интервале $x_1<x<x_2$ и $\psi(x)=0$ вне этого интервала. При $t>0$ на плоскости $Oxt$ найдите все точки, в которых

$1^0$. $u(x,t)=0$;

$2^0$. $u(x,t)$ определяется интегралом от функции $\psi$ лишь по части отрезка $x_1\le x\le x_2$;

$3^0$. $u(x,t)$ определяется интегралом от функции $\psi$ по всему отрезку $x_1\le x\le x_2$.

**Задача.** Пусть $\varphi\equiv 0$, $\psi\equiv 0$, $f(x,t)>0$ в прямоугольнике $D=\{x_1<x<x_2\}\times\{0<t<T\}$ и $f(x,t)=0$ вне этого

прямоугольника. При $t>0$ на плоскости $Oxt$ найдите все точки, в которых

$1^0$. $u(x,t)=0$;

$2^0$. $u(x,t)$ определяется интегралом от функции $f$ лишь по части прямоугольника $D$;

$3^0$. $u(x,t)$ определяется интегралом от функции $f$ по всему прямоугольнику $D$.

## § 3. Построение решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на полупрямой методом продолжений.

Если нас интересуют колебания струны на участке возле одного из её концов, но вдали от другого, и в таком промежутке времени, когда влияние удалённого конца ещё не успевает сказаться на выбранном участке, то такие колебания можно считать происходящими при $0\le x<+\infty$.

**п.1.** Рассмотрим задачи о распространении волн на полупрямой $x\in[0,\infty)$. Эти задачи ставятся следующим образом:

Найти решение уравнения

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x>0,\quad t>0, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,t)=\mu(t)\ \textbf{или}\ u_x(0,t)=\nu(t),\quad t\ge 0, \tag{3.2}$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\ge 0. \tag{3.3}$$

Решение каждой из этих двух задач можно представить как сумму решений двух задач: с однородными начальными условиями, но с неоднородным граничным условием, и с неоднородными начальными условиями, но с однородным граничным.

**п.2.** Рассмотрим сначала начально-краевую задачу с однородным условием Дирихле:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \geq 0, \tag{3.5}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.6}$$

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом на всю прямую:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x \leq 0, \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда на всей прямой получим задачу для функции $U(x,t)$:

$$U_{tt}(x,t) = a^2 U_{xx}(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0,$$

$$U(x,0) = \varphi_1(x), \quad U_t(x,0) = \psi_1(x), \quad x \in R^1.$$

Решение этой задачи даётся формулой Даламбера

$$U(x,t) = \frac{\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(z)dz.$$

Выпишем формулу Даламбера для задачи (3.4) – (3.6), учитывая при этом, что $x - at$ может быть как больше нуля, так и меньше нуля. Если $x + at > x - at > 0$, то $\varphi_1(x \pm at) = \varphi(x \pm at)$, $\psi_1(x \pm at) = \psi(x \pm at)$. Если $x - at < 0$, то $\varphi_1(x - at) = -\varphi(at - x)$, $\psi_1(x - at) = -\psi(at - x)$.

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz, \\ x>0,\quad 0<t\le\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz, \\ x>0,\quad t\ge\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Для существования классического решения необходимо, чтобы функция $\varphi(x)$ была дважды непрерывно дифференцируема в области $x\ge 0$, а функция $\psi(x)$ – один раз непрерывно дифференцируема в области $x\ge 0$, и чтобы $\varphi(0)=0, \psi(0)=0$.

**п.3.** Рассмотрим теперь начально-краевую задачу с однородным условием Неймана:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x>0,\quad t>0, \tag{3.7}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\ge 0, \tag{3.8}$$

$$u_x(0,t)=0,\quad t\ge 0. \tag{3.9}$$

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четным образом на всю прямую:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\ge 0,\\ \varphi(-x), & x\le 0,\end{cases}$$

$$\psi_1(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\ge 0,\\ \psi(-x), & x\le 0.\end{cases}$$

На всей прямой получаем задачу для функции $U(x,t)$:

$$U_{tt}(x,t)=a^2U_{xx}(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0,$$

$$U(x,0)=\varphi_1(x),\quad U_t(x,0)=\psi_1(x),\quad x\in R^1.$$

Учитывая, что если $x+at>x-at>0$, то $\varphi_1(x\pm at)=\varphi(x\pm at)$, $\psi_1(x\pm at)=\psi(x\pm at)$, а если $x-at<0$, то $\varphi_1(x-at)=\varphi(at-x)$, $\psi_1(x-at)=\psi(at-x)$, получим решение задачи (3.7) – (3.9):

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz, \\ x>0,\ 0<t\le\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int\limits_0^{x+at}\psi(z)dz+\int\limits_0^{at-x}\psi(z)dz\right\}, \\ x>0,\ t\ge\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Для существования классического решения необходимо выполнение тех же условий гладкости функций $\varphi$ и $\psi$, что в задаче (3.4) – (3.6). Кроме того, надо потребовать $\varphi_x(0)=0$, $\psi_x(0)=0$.

## § 4. Существование решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой с неоднородным краевым условием.

Рассмотрим начально-краевую задачу в области $x\ge 0$ для однородного уравнения колебаний с однородными начальными условиями и неоднородным краевым условием Дирихле:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x>0,\ t>0,$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad x\ge 0,$$

$$u(0,t)=\mu(t), \quad t \ge 0.$$

Причиной возникновения возмущений здесь может быть только краевой режим. Будем искать решение в виде бегущей вправо волны: $u(x,t)=f(x-at)$, где $f(z)$ – достаточно гладкая функция. Из первого начального условия получим $u(x,0)=f(x)=0, \quad x>0$. Второе начальное условие даёт $u_t(x,0)=-af'(x)=0, \quad x>0$. С другой стороны, $u(0,t)=f(-at)=\mu(t)$, где $\mu(t)$ – заданная при $t>0$ функция. Следовательно,

$$u(x,t)=\begin{cases} 0, & 0<t<\dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

**Замечание.** При $t<\dfrac{x}{a}$ влияние граничного режима не сказывается на точке с координатой $x$. При $t>\dfrac{x}{a}$ возмущение в точке $x$ формируется граничным режимом.

Аналогичными рассуждениями решается и задача с неоднородным краевым условием Неймана. Решение имеет вид

$$u(x,t)=\begin{cases} 0, & 0<t<\dfrac{x}{a}, \\ f(x-at), & t>\dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

Подставляя его в краевое условие $u_x(0,t)=\nu(t)$, найдём $f(z)$ (найдите!).

# § 5. Начально-краевые задачи на отрезке. Единственность и существование их решений.

## п.1. Постановка начально-краевых задач для уравнения колебаний на отрезке.

В § 1 мы получили уравнение вынужденных поперечных колебаний струны

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t) \tag{5.1}$$

на интервале $0<x<l$. Для однозначного задания процесса колебаний кроме (5.1) нужны дополнительные условия. Такими условиями могут быть, например, краевые условия на концах отрезка и начальные условия, определяющие начальное смещение $u(x,0)$ и начальную скорость $u_t(x,0)$. Мы запишем краевые условия общего вида, но будем рассматривать только случаи краевых условий Дирихле или Неймана.

Сформулируем начально – краевую задачу:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{5.2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{5.3}$$

$$\left[\alpha_1\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_1u(x,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\chi_1(t),\ \ t\ge 0, \tag{5.4$'$}$$

$$\left[\alpha_2\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_2u(x,t)\right]\Bigg|_{x=l}=\chi_2(t),\quad t\ge 0. \tag{5.4$''$}$$

Если $\alpha_1=0$, $\beta_1\ne 0$, то при $x=0$ получаем краевое условие I рода (Дирихле), а если $\alpha_1\ne 0$, $\beta_1=0$, то – II рода (Неймана). Аналогично при $x=l$.

Если на обоих концах отрезка поставлены краевые условия Дирихле, то (5.2) – (5.4) называют первой начально-краевой задачей. Если на обоих концах поставлены условия Неймана, то – второй начально-краевой задачей. Возможны смешанные задачи с краевыми условиями разных типов на концах отрезка.

**Определение.** Классическим решением начально-краевой задачи (5.2) – (5.4) называется функция $u(x,t)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутой области $\{0 \le x \le l\} \times \{0 \le t < \infty\}$, имеющая непрерывные производные второго порядка в открытой области $\{0 < x < l\} \times \{0 < t < \infty\}$ и удовлетворяющая в ней уравнению колебаний (5.2), удовлетворяющая при $0 \le x \le l$ начальным условиям (5.3), а на концах этого отрезка при $t \in [0, \infty)$ – граничным условиям (5.4).

**Замечание 1.** Если граничное условие (5.4′) есть условие Дирихле, т.е. $\alpha_1 = 0$, то непрерывности первой производной $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ при $x = 0$ не требуется. Достаточно предположения о непрерывности при $x = 0$ лишь самой функции $u(x,t)$. Аналогично при $x = l$.

**Замечание 2.** Для существования классического решения необходимо согласование начальных и краевых условий. Например, если $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \ne 0$, то $\varphi(0) = \dfrac{\chi_1(0)}{\beta_1}$, $\psi(0) = \dfrac{\chi_1'(0)}{\beta_1}$.

**Задача.** Как надо согласовать начальные краевые условия для каждой из 4 комбинаций условий Дирихле или Неймана на концах $x = 0$ и $x = l$?

**Замечание 3.** Можно провести редукцию задачи (5.2)-(5.4). В силу линейности этой задачи её решение можно представить в виде $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)$, где $u_1(x,t)$ – решение задачи (5.2)-(5.4), в которой $f \equiv 0$, $\chi_1 \equiv 0$, $\chi_2 \equiv 0$; $u_2(x,t)$ – решение задачи (5.2)-(5.4), в которой $\chi_1 \equiv 0$, $\chi_2 \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$; $u_3(x,t)$ – решение задачи (5.2)-(5.4), в которой $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$. Задачу для $u_3(x,t)$ можно свести к первым двум задачам при помощи замены искомой функции.

**Замечание 4.** Часто встречаются задачи, решения которых не могут удовлетворять требованиям, предъявляемым к **классическим** решениям. Например, может не выполняться согласование начальных и краевых условий. Может оказаться, что невыполнимо требование гладкости искомой функции. В таких случаях понятие решения задачи надо рассматривать в более широком, **обобщённом** смысле. В настоящем курсе мы рассматриваем только классические решения.

## п.2. Единственность решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на отрезке.

**Теорема единственности решения задачи на отрезке.** Задача (5.2) – (5.4) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство. Докажем теорему для краевых условий Дирихле и для краевых условий Неймана. Предположим, что существуют два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (5.2) – (5.4). Функция $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$w_{tt}(x,t) = a^2 w_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \beta_1 w(x,t)\right]_{x=0} = 0,$$

$$\left[\alpha_2 \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \beta_2 w(x,t)\right]\Bigg|_{x=l} = 0\,,\ t \ge 0\,.$$

Введём функционал

$E(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \left(w_t^2(x,t) + a^2 w_x^2(x,t)\right)dx$. Смысл $E(t)$ состоит в том, что с точностью до постоянного множителя (плотности массы) величина $E(t)$ является полной энергией колеблющейся струны в момент времени $t$. Из определения $E(t)$ и из начальных условий следует, что $E(t) \ge 0$, $E(0) = 0$.

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l \left(w_t(x,t) w_{tt}(x,t) + a^2 w_x(x,t) w_{xt}(x,t)\right)dx\,.$$

Интеграл $a^2 \displaystyle\int_0^l w_x(x,t) w_{xt}(x,t)dx$ вычислим по частям:

$$a^2 \int_0^l w_x(x,t) w_{xt}(x,t)dx =$$

$$= a^2 \left(w_x(x,t) w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l} - a^2 \int_0^l w_{xx}(x,t) w_t(x,t)dx.$$

Тогда получим

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l \left(w_t\left(w_{tt} - a^2 w_{xx}\right)\right)dx + a^2\left(w_x(x,t) w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Так как функция $w(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению колебаний, то

$$\frac{dE}{dt} = a^2\left(w_x(x,t) w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

В случае первой краевой задачи $w(0,t) = w(l,t) = 0$ во все моменты времени $t \ge 0$.

Поэтому $w_t(0,t)=w_t(l,t)=0$. Отсюда $\dfrac{dE}{dt}=0$, $E(t)=const$. Но $E(0)=0$, поэтому $E(t)\equiv 0$.

В случае второй краевой задачи $w_x(0,t)=w_x(l,t)=0$. Отсюда $\dfrac{dE}{dt}=0$ и снова $E(t)\equiv 0$.

Следовательно, $E(t)\equiv 0$ для обеих краевых задач. Отсюда получаем $w_t(x,t)=0$ и $w_x(x,t)=0$, $0<x<l,\quad t>0$. Поэтому $w(x,t)=const$. Так как $w(x,0)=0$, то $w(x,t)\equiv 0$. Теорема доказана.

## п. 3. Теоремы существования решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на отрезке.

Без ограничения общности можно считать, что в начально-краевой задаче (5.2) – (5.4) заданные функции $\chi_1(t)\equiv 0$ и $\chi_2(t)\equiv 0$. Этого всегда можно добиться при помощи подходящей замены искомой функции.

Для простоты будем рассматривать на концах отрезка $0\le x\le l$ только краевые условия Дирихле или Неймана (всего 4 комбинации краевых условий).

Сначала рассмотрим вопрос о существовании классического решения начально-краевой задачи для **однородного** уравнения колебаний.

Построение решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на отрезке можно провести методом разделения переменных. Этот метод был подробно описан в § 5 главы 1 для уравнения теплопроводности. Для уравнения колебаний метод разделения переменных основан на той же идее: сначала найдём частные решения однородного уравнения

$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)$, которые имеют вид $X(x)\cdot T(t)$ и при $x=0$ и $x=l$ удовлетворяют **однородным** краевым условиям заданных типов. Разделяя переменные в уравнении колебаний, мы получим для определения $X(x)$ и $T(t)$ обыкновенные дифференциальные уравнения

$$X''_{xx}(x)+\lambda\cdot X(x)=0 \quad \text{и} \quad T''_{tt}(t)+a^2\cdot\lambda\cdot T(t)=0.$$

Учитывая краевые условия, приходим к задаче Штурма-Лиувилля относительно $X(x)$. Эта задача ничем не отличается от такой же задачи, рассмотренной в § 5 главы 1. Пусть $\lambda_n$ – её собственные значения, а $X_n(x)$ – отвечающие им собственные функции. Уравнение относительно $T(t)$ надо решать для всех $\lambda=\lambda_n$; при каждом $\lambda_n$ общее решение этого уравнения второго порядка имеет вид $T_n(t)=C'_n\cdot\cos(\omega_n t)+C''_n\cdot\sin(\omega_n t)$, где $\omega_n=a\cdot\sqrt{\lambda_n}$, $C'_n$ и $C''_n$ – произвольные постоянные. Теперь решение исходной начально-краевой задачи для уравнения колебаний в силу её линейности можно строить в виде $u(x,t)=\sum\limits_n X_n(x)\cdot T_n(t)$. При этом две последовательности неизвестных пока постоянных легко найти из двух начальных условий: для этого надо заданные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ разложить в ряды Фурье по системе функций $\{X_n(x)\}$ на отрезке $0\le x\le l$ и сравнить коэффициенты при $X_n(x)$ в равенствах

$$u(x,0)=\sum_n X_n(x)\cdot T_n(0)=\varphi(x)=\sum_n X_n(x)\cdot\varphi_n,$$

$$u_t(x,0)=\sum_n X_n(x)\cdot T'_n(0)=\psi(x)=\sum_n X_n(x)\cdot\psi_n;$$

здесь $\varphi_n$ и $\psi_n$ – коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по системе $\{X_n(x)\}$.

**Задача.** Для каждой из 4 комбинаций однородных краевых условий Дирихле или Неймана на концах $x=0$ и $x=l$ постройте методом разделения переменных решение задачи (5.2) – (5.4) в случае однородного уравнения: $f\equiv 0$, $\chi_1\equiv 0$, $\chi_2\equiv 0$.

Построенное решение $u(x,t)$ будет пока лишь формальным: надо ещё доказать, что оно удовлетворяет требованиям, предъявляемым к классическим решениям. В частности, надо доказать, что функциональный ряд $\sum_n X_n(x)\cdot T_n(t)$ можно два раза дифференцировать почленно по $x$ и по $t$. Для этого нужны некоторые предположения о функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Разные комбинации краевых условий требуют отличающихся друг от друга предположений. Мы докажем теорему о существовании классического решения на примере задачи с краевыми условиями Дирихле.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке с граничными условиями I типа:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{5.5}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0,\\ \varphi(0)=\varphi(l)=0,\quad \psi(0)=\psi(l)=0. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Метод разделения переменных даёт

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x,\quad n=1,2,...,$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\cos\omega_n t+\frac{B_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{5.8}$$

$$\omega_n=\frac{\pi n a}{l},\quad A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi,$$

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi .$$

**Теорема.** Пусть начальные данные удовлетворяют следующим условиям: функция $\varphi(x) \in C^2[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную третью производную, функция $\psi(x) \in C^1[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную вторую производную, причём $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи (5.5) – (5.7), представимое формулой (5.8).

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно доказать непрерывность функции $u(x,t)$ и её производной $u_t(x,t)$ в области $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ и непрерывное примыкание функции $u(x,t)$ к заданным начальным и граничным условиям. Кроме того, нужно доказать существование вторых производных функции $u(x,t)$ и выполнение уравнения (5.5) в области $0 < x < l$, $t > 0$. Для доказательства непрерывности функции $u(x,t)$ и её производной $u_t(x,t)$ в области $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \cos\omega_n t + \frac{B_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (5.9)$$

и ряда, полученного формальным дифференцированием ряда (5.9) по $t$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\left\{-A_n \sin\omega_n t + \frac{B_n}{\omega_n}\cos\omega_n t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x . \qquad (5.10)$$

Мажорантным рядом для ряда (5.9) является числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{|A_n|+\frac{1}{\omega_n}|B_n|\right\}$, а для ряда (5.10) – числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\{\omega_n|A_n|+|B_n|\}$. Из теории рядов Фурье известно, что эти числовые ряды сходятся при условиях, наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Следовательно, ряды (5.9) и (5.10) сходятся равномерно и определяют непрерывные функции в области $0<x<l$, $t>0$. Из тех же условий, наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, следует, что ряды Фурье этих функций по системе $\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся равномерно на $[0,l]$ к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому при $t=0$ выполняются начальные условия. А так как все собственные функции $\sin\frac{\pi n}{l}x$ удовлетворяют однородным граничным условиям, то выполняются и граничные условия. Для доказательства существования вторых производных функции $u(x,t)$ в области $0<x<l$, $t>0$ продифференцируем (5.8) два раза по $t$ и два раза по $x$. Тогда получим ряды, которые мажорируются числовым рядом $\max\left\{1,\frac{1}{a^2}\right\}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2\left\{|A_n|+\frac{1}{\omega_n}|B_n|\right\}$, который сходится в силу свойств функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу для **неоднородного** уравнения колебаний с однородными начальными и граничными условиями:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\ 0<x<l\,,t>0\,, \quad (5.11)$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le l, \tag{5.12}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0. \tag{5.13}$$

Предположим, что существует классическое решение этой задачи. Разложим функцию $u(x,t)$ при фиксированном $t\ge 0$ в ряд Фурье по собственным функциям $\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{5.14}$$

Коэффициенты разложения $u_n(t)$ рассчитываются по формуле $u_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi$. Поскольку функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи, то для интеграла, представляющего $u_n(t)$, выполнены условия дифференцируемости по параметру под знаком интеграла. Поэтому

$$u_n^{(k)}(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi,\quad k=1,2.$$

Умножим уравнение (5.11) на $\frac{2}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x$ и проинтегрируем по $x$ от 0 до $l$. В результате получим

$$\frac{2}{l}\int_0^l\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx=a^2\,\frac{2}{l}\int_0^l u_{xx}(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx+$$

$$+\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

Вычисляя интеграл $\int\limits_0^l u_{xx}(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}xdx$ два раза по частям и учитывая граничные условия, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по $t$

$$u_n''(t)+\omega_n^2 u_n(t)=f_n(t),$$

где $f_n(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi$.

Из начальных условий (5.12) следует $u_n(0)=0$, $u_n'(0)=0$. Получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на полупрямой $t>0$ с начальными условиями при $t=0$. Решение этой задачи можно построить методом вариации постоянных. Оно имеет вид

$$u_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau.$$

Решение задачи (5.11) – (5.13) построено в виде ряда (5.14), коэффициенты которого теперь известны:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t\left(\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi\, d\tau, \qquad (5.15)$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi\sin\omega_n(t-\tau). \qquad (5.16)$$

Можно доказать, что для непрерывной в области $0\le x\le l$, $t\ge 0$ функции $f(x,t)$, удовлетворяющей нулевым начальным и граничным условиям, представление (5.15), (5.16) определяет классическое решение задачи (5.11) – (5.13).

**Определение.** Функция $G(x,\xi,t-\tau)$, определяемая формулой (5.16), называется функцией Грина или функцией влияния мгновенного точечного импульса на отрезке.

# § 6. Начально-краевые задачи в ограниченной области пространства. Единственность их решений.

## п.1. Уравнения колебаний с 2 или 3 пространственными переменными.

Смещение колеблющейся системы по отношению к её невозмущённому состоянию может зависеть не от одной, а от нескольких пространственных переменных.

**Пример.** Рассмотрим в плоскости $Oxy$ связную область $D$ с границей $\gamma$. Можно считать её двумерной однородной невозмущённой мембраной. Возмутим мембрану каким-либо образом. Предположим при этом, что любая точка мембраны, которая в невозмущённом состоянии имела в $Oxyz$ пространственные координаты $(x, y, 0)$, смещается только в направлении оси $Oz$ на величину $u(x,y,t)$ в момент времени $t$. Для описания распространения волн по мембране сделаем предположения, аналогичные предположениям о колебаниях струны. Тогда получим уравнение малых свободных поперечных колебаний мембраны $u_{tt}(x,y,t)=a^2(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t))$. Если на мембрану действует распределённая по ней поперечная внешняя сила, то уравнение колебаний мембраны имеет вид $u_{tt}(x,y,t)=a^2(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t))+f(x,y,t)$.

Информацию о поведении края мембраны надо задать отдельно. Например, если край мембраны неподвижен, то $u(P,t)=0$ для всех точек $P\in\gamma$, $P=P(x,y)$, во все моменты времени. Если в каждый момент времени измеряется положение движущихся точек края мембраны, то $u(P,t)=\mu(P)$, $P\in\gamma$, – известная функция. Как и на конце струны, на краю мембраны можно задать более общее граничное условие вида $\alpha(P)\cdot\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n}+\beta(P)\cdot u(P,t)=\chi(P,t)$; здесь $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к $\gamma$. Если в момент времени $t_0$ известен изгиб мембраны, то задана функция $u(M,t_0)=\varphi(M)$, $M=M(x,y)$, $M\in\overline{D}$. Если в этот момент времени измеряются скорости поперечного движения точек мембраны, то $u_t(M,t_0)=\psi(M)$, $M\in\overline{D}$, – известная функция.

**Пример.** Рассмотрим пространственную область $\Omega$ с границей $S$. Пусть эта область заполнена газом, в котором распространяются звуковые волны. В невозмущённом состоянии объёмная плотность газа $\rho$ и давление $p$ постоянны в $\Omega$. Звуковая волна возмущает эти величины, т.е. приводит к зависимости их от точки $M(x,y,z)\in\Omega$ и времени $t$: $\rho=\rho(M,t)$, $p=p(M,t)$. Будем считать, что в области $\Omega$ нет источников или стоков газа, что звуковые колебания малы, внешние силы на частицы газа не действуют, и что процесс распространения звука является адиабатическим (т.е. газ не получает тепло извне и не отдаёт его). Тогда $\rho$ и $p$ удовлетворяют в $\Omega$ уравнениям

$$\rho_{tt}(M,t)=a^2\Delta_{(x,y,z)}\rho(M,t),$$

$$p_{tt}(M,t)=a^2\Delta_{(x,y,z)}p(M,t).$$

Здесь $a$ – величина скорости звука в газе.

## п.2. Постановка начально-краевых задач для уравнения колебаний в ограниченной области пространства.

Мы рассмотрим только задачи с 3 пространственными переменными; задачи с 2 пространственными переменными ставятся аналогично. Эти задачи являются естественным обобщением начально-краевых задач, изученных в § 5.

Пусть задана ограниченная область $\Omega\subset R^3$ с границей $S$, допускающей применение формул Грина. Задача состоит в определении в цилиндрической области $\overline{Q}=\overline{\Omega}\times[0,\infty)$ функции $u(M,t)$, удовлетворяющей уравнению колебаний

$$u_{tt}(M,t)=a^2\Delta u(M,t)+f(M,t),$$

$$(M,t)\in Q=\Omega\times(0,\infty), \tag{6.1}$$

начальным условиям

$$u(M,0)=\varphi(M),\quad u_t(M,0)=\psi(M),\quad M\in\overline{\Omega}, \tag{6.2}$$

и граничным условиям

$$\alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P}+\beta(P)u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\, t\in[0,\infty), \tag{6.3}$$

где $\alpha(P)+\beta(P)\neq 0, \alpha(P)\geq 0, \beta(P)\geq 0$.

Если $\alpha(P)\equiv 0$, то получаем первую начально – краевую задачу; если $\beta(P)\equiv 0$, то получаем вторую начально – краевую задачу.

**Определение.** Классическим решением начально – краевой задачи (6.1)–(6.3) называется функция $u(M,t)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутой области $\overline{Q}$, имеющая непрерывные производные второго порядка в открытой области $Q$, удовлетворяющая в $Q$ уравнению колебаний (6.1), в области $\overline{\Omega}$ – начальным условиям (6.2), а на поверхности $S$ при $t\in[0,\infty)$ – граничным условиям (6.3). $u(M,t)\in C^1(\overline{Q})\cap C^2(Q)$.

**Замечание 1.** Если граничное условие (6.3) есть условие Дирихле, т.е. $\alpha(P)\equiv 0$, то непрерывности первых производных функции $u(M,t)$ в $\overline{Q}$ не требуется. Достаточно предположения $u(M,t)\in C(\overline{Q})\cap C^2(Q)$.

**Замечание 2.** Для существования классического решения необходимо согласование начальных и граничных условий:

$$\alpha(P)\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n_P}+\beta(P)\varphi(P)=\chi(P,0),\quad P\in S,$$

$$\alpha(P)\frac{\partial\psi(P)}{\partial n_P}+\beta(P)\psi(P)=\chi_t(P,0),\quad P\in S.$$

**Замечание 3.** В силу линейности задачи (6.1) – (6.3) её решение $u(M,t)$ можно представить в виде суммы решений трёх задач: $u(M,t)=u_1(M,t)+u_2(M,t)+u_3(M,t)$, где $u_1(M,t)$ – решение задачи с однородным уравнением, однородными граничными условиями и неоднородными начальными условиями, $u_2(M,t)$ – решение задачи с неоднородным уравнением и однородными граничными и начальными условиями, $u_3(M,t)$ – решение задачи с однородным уравнением, однородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями. При этом задачу для $u_3(M,t)$ можно свести к первым двум задачам.

**Замечание 4.** Часто встречаются задачи, решения которых не могут удовлетворять требованиям, предъявляемым к **классическим** решениям. Если не выполняется согласование начальных и граничных условий или искомая функция $u(M,t)$ не может обладать требуемой гладкостью, то понятие решения задачи надо рассматривать в более широком, **обобщённом** смысле. В настоящем курсе мы рассматриваем только классические решения.

Далее будем рассматривать только краевые условия вида $u(P,t)=\mu(t)$ или $\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n_P}=\nu(t)$.

## п.3. Единственность решений начально – краевых задач для уравнения колебаний в ограниченной области пространства.

**Теорема единственности решения.** Задача (6.1) – (6.3) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство. Докажем теорему для краевых условий Дирихле или Неймана. Допустим, что существуют два различных решения $u_1(M,t)$ и $u_2(M,t)$ задачи (6.1) – (6.3). Введём функцию $w(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$, которая удовлетворяет задаче

$$w_{tt}(M,t)=a^2\Delta w(M,t)\,,\quad (M,t)\in Q\,,$$

$$w(M,0)=0,\quad w_t(M,0)=0,\quad M\in\overline{\Omega}\,,$$

$$\alpha(P)\frac{\partial w(P,t)}{\partial n_P}+\beta(P)w(P,t)=0, \quad P\in S, t\in[0,\infty) .$$

Построим функционал $E$, зависящий от $t$ как от параметра:

$$E(t)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left(w_t^2(M,t)+a^2\left|grad\, w(M,t)\right|^2\right)d\tau_M .$$

С точностью до постоянного множителя (плотности массы) величина $E(t)$ является полной энергией колебательной системы в момент времени $t$. Из определения функционала и из начальных условий следует, что $E(t)\geq 0$ и $E(0)=0$. Покажем, что $\frac{dE}{dt}\equiv 0$.

Вычислим производную, дифференцируя подынтегральное выражение:

$$\frac{dE}{dt}=\iiint\limits_{\Omega}\left(w_t\cdot w_{tt}+a^2\left(grad\, w(M,t)\cdot grad\, w_t(M,t)\right)\right)d\tau_M .$$

Вспомним первую формулу Грина (здесь $t$ – параметр, градиенты вычисляем только по пространственным переменным):

$$\iiint\limits_{\Omega}v\Delta U d\tau_M=\iint\limits_{S}v\frac{\partial U}{\partial n_M}d\sigma_M-\iiint\limits_{\Omega}(grad\, U\cdot grad\, v)d\tau_M .$$

Пусть в этой формуле $U(M,t)=w(M,t)$, $v(M,t)=w_t(M,t)$ (в случае первой краевой задачи нужно дополнительное предположение о применимости первой формулы Грина к этим функциям, т.е. предположение $w, w_t\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$). Тогда

$$-a^2\iiint\limits_{\Omega}\Delta w(M,t)\cdot w_t(M,t)d\tau_M +$$

$$+a^2\iint\limits_{S}w_t\frac{\partial w}{\partial n_M}d\sigma_M=a^2\iiint\limits_{\Omega}(grad\, w\cdot grad\, w_t)d\tau_M . \quad (6.4)$$

Подставляя (6.4) в выражение для $\frac{dE}{dt}$ и используя однородное уравнение колебаний, получим $\frac{dE}{dt} = a^2 \iint\limits_S w_t(M,t) \frac{\partial w(M,t)}{\partial n_M} d\sigma_M$.

В случае первой краевой задачи $w(M,t) = 0$, $M \in S$, во все моменты времени $t \in [0, \infty)$. Поэтому $w_t(M,t) = 0$, $M \in S$. Отсюда $\frac{dE}{dt} = 0$. Но $E(0) = 0$, поэтому $E(t) \equiv 0$.

В случае второй краевой задачи $\frac{\partial w(M,t)}{\partial n_M} = 0$, $M \in S$. Отсюда $\frac{dE}{dt} = 0$ и снова $E(t) \equiv 0$.

Следовательно, $E(t) \equiv 0$ для обеих краевых задач. Отсюда получаем $w_t(M,t) \equiv 0$ и $grad\, w(M,t) \equiv 0$, $(M,t) \in Q$. Поэтому $w(M,t) = const$. Так как $w(M,0) = 0$, то $w(M,t) \equiv 0$. Теорема доказана.

**Замечание.** Используя первую формулу Грина на плоскости, можно совершенно аналогично доказать теорему единственности решения в ограниченной области $D \subset R^2$.